

3.7.30. *Demostrar que la suma de tres cuadrados consecutivos no puede ser múltiplo de 19.*

Solución: Sea $f(x) = (x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 = 3x^2 + 2$. Basta ver que:

$$f(x) \not\equiv 0 \pmod{19} \forall x \in \mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$$

O equivalentemente, que:

$$3x^2 \not\equiv -2 \pmod{19} \forall x \in \mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$$

Es decir,

$$x^2 \not\equiv 12 \pmod{19} \forall x \in \mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$$

Podemos comprobar esto a mano, viendo que el 12 no está entre los residuos cuadráticos módulo 19, que son: $\{1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17\}$.

Problema escrito por Rubén García-Valcárcel Sen