3.7.29. *Demostrar que la congruencia $x^5 \equiv 300x$ (mód 101) tiene una única solución.*

Es fácil comprobar que x=0 es solución de la ecuación. Por tanto, tenemos que comprobar que no existen más soluciones aparte de esta.

En caso de que haya otra solución, esta será distinta de 0 ($x \neq 0$), luego podemos proceder a simplicar la ecuación:

$$x^5 \equiv 300x \ (mod\ 101)$$

$$x^4 \equiv 300 \ (mod\ 101)$$

$$x^4 \equiv -3 \ (mod\ 101)$$

$$(x^2)^2 \equiv -3 \ (mod\ 101)$$

Podemos renombrar $y = x^2$. Entonces, basta comprobar que $y^2 \equiv -3 \ (mod\ 101)$ no tiene solución.

Vamos a calcular el símbolo de Legendre $\binom{-3}{101}$.

Utilizamos el Corolario 3.6.5:

$$\binom{-3}{101} = \binom{-1}{101}\binom{1}{101}$$

Ahora utilizamos la Proposición 3.6.6. y obtenemos:

$$\binom{-1}{101}\binom{1}{101} = (-1)^{\frac{101-1}{2}}\binom{3}{101} = \binom{3}{101}$$

Como 101 es primo, podemos utilizar la Ley de Reciprocidad Cuadrática:

$$\binom{3}{101} = \binom{101}{3}(-1)^{\frac{(3-1)\cdot(101-1)}{4}} = \binom{101}{3} = \binom{2}{3} = -1$$

Por tanto, hemos visto que $\binom{2}{3} = -1 \implies y^2 \equiv -3$ (mod 101) no tiene solución $\implies x^4 \equiv -3$ (mod 101) no tiene solución $\implies x^5 \equiv 300x$ (mod 101) sólo tiene como solución x=0.

Problema escrito por Jesús de los Nietos Valle.