3.7.26. *Caracterizar los primos para los que tiene solución la congruencia* $5x^2 - 3x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Solución:

En caso de que $p = 2$, no hay solución a la congruencia, por lo que nos centraremos en los primos impares.

Tenemos que, por el ejercicio 3.7.25, la ecuación $5x^2-3x+1 \equiv 0 \pmod{p}$ tiene solución si y sólo si

$$y^2 = 3^2 - 4 \cdot 5 = -11$$

tiene solución.

Es decir, tiene solución solamente si

$$\left(\frac{-11}{p}\right) = 1$$

Como el símbolo de Legendre es una función completamente multiplicativa, tenemos que estudiar si:

$$\left(\frac{11}{p}\right)\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$$

Para ello, aplicamos la ley de reciprocidad cuadrática:

$$\left(\frac{11}{p}\right)\left(\frac{p}{11}\right) = (-1)^{\frac{10(p-1)}{4}} = (-1)^{\frac{5(p-1)}{2}} =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{si } p \equiv 1 \pmod{4} \\ -1, & \text{si } p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Y, de aquí, obtenemos que

$$\left(\frac{11}{p}\right) = \begin{cases} \left(\frac{p}{11}\right), & \text{si } p \equiv 1 \pmod{4} \\ -\left(\frac{p}{11}\right), & \text{si } p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Por otro lado, tenemos que, si p es un primo impar:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } p \equiv 1 \pmod{4} \\ -1, & \text{si } p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Por tanto, tenemos que la congruencia tiene solución si:

$$\left(\frac{11}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } p \equiv 1 \pmod 4 \\ -1, & \text{si } p \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

Esto ocurre si

$$\left(\frac{p}{11}\right) = 1$$

.

o, lo que es lo mismo,

$$p \equiv 1, 3, 4, 5, \text{ ó } 9 \pmod{11}$$

Problema escrito por Javier Sanz-Cruzado Puig