

3.7.20 Probar que todo entero satisface alguna de las congruencias $x \equiv 0 \pmod{2}$, $x \equiv 3 \pmod{3}$, $x \equiv 1 \pmod{4}$, $x \equiv 3 \pmod{8}$, $x \equiv 7 \pmod{12}$, $x \equiv 23 \pmod{24}$.

Solución:

Supongamos que un entero x no cumple ninguna de estas congruencias, vamos a demostrar que necesariamente $x \equiv 23 \pmod{24}$, lo que sería una contradicción.

Por las dos primeras congruencias, x no es múltiplo de 2 ni de 3, por lo que, de momento $x \equiv 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ ó $23 \pmod{24}$.

Como $x \not\equiv 1 \pmod{4}$ y $x \not\equiv 3 \pmod{8}$ eliminamos algunas posibilidades, con lo que $x \equiv 7$ ó $23 \pmod{24}$. Por último como $x \not\equiv 7 \pmod{12}$, tenemos necesariamente $x \equiv 23 \pmod{24}$.

Problema escrito por Federico Alfaro.