3.7.15. *Demostrar que el conjunto de puntos de coordenadas visibles desde el origen contiene cuadrados vacíos tan grandes como queramos.*

Solución: La prueba es constructiva, vamos a localizar un cuadrado de $k \times k$ tal que ningún punto sea visible desde el origen. Sea (x, y) el vértice inferior izquierdo de ese cuadrado, por tanto los otros vértices serán $(x, y+k-1)$, $(x+k-1, y)$ y $(x+k-1, y+k-1)$. Vamos a dar la solución y luego justificamos por qué funciona. Escogemos x una solución positiva de la congruencia (p_i es el primo i-ésimo, por conveniencia $p_0 = 2$):

$$\begin{cases} x \equiv 0 \mod p_0 & x \equiv -1 \mod p_k & ... & x \equiv -k+1 \mod p_{k^2-k} \\ x \equiv 0 \mod p_1 & x \equiv -1 \mod p_{k+1} & ... & x \equiv -k+1 \mod p_{k^2-k+1} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ x \equiv 0 \mod p_{k-1} & x \equiv -1 \mod p_{2k-1} & ... & x \equiv -k+1 \mod p_{k^2-1} \end{cases}$$

Y sea y una solución positiva de

$$\begin{cases} y \equiv 0 \mod p_0 & y \equiv 0 \mod p_k & ... & y \equiv 0 \mod p_{k^2-k} \\ y \equiv -1 \mod p_1 & y \equiv -1 \mod p_{k+1} & ... & y \equiv -1 \mod p_{k^2-k+1} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ y \equiv -k+1 \mod p_{k-1} & y \equiv -k+1 \mod p_{2k-1} & ... & y \equiv -k+1 \mod p_{k^2-1} \end{cases}$$

Para empezar estas soluciones existen por el teorema chino del resto (es claro que todos los p_i son coprimos dos a dos y sumando múltiplos de $p_0 p_1 ... p_{k^2-1}$ podemos hacer que además sean positivas). Ahora sólo hay que ver que en el cuadrado $k \times k$ cuyo vértice inferior izquierdo es (x, y) se verifica que ningún punto es visible desde el origen. Por ejemplo, si nos fijamos en la línea inferior, $(x, y+i)$ para $i = 0, ..., k-1$, sabemos que $p_i | x$ (por definición) y como $y + i \equiv 0 \mod p_i$, $p_i | y + i$ y el punto $(x, y+i)$ no es visible desde el origen.

En general, tenemos que $p_{ik+j} | mcd(x+i, y+j)$ para $i, j = 0, ..., k-1$ y por tanto el punto $(x+i, y+j)$ nunca será visible desde el origen.

Problema escrito por Diego González Sánchez.