3.7.12. *Caracterizar todos los enteros x que satisfacen simultaneamente e las congruencias $x \equiv 7 \pmod{k}, 2 \leq k \leq 10$. ¿Puede alguno de estos enteros ser un cuadrado?*

Solución: El problema es equivalente a encontrar los x que satisfacen $x \equiv 7 \pmod{k}, \forall k \in \{8, 9, 5, 7\}$, ya que los casos $k = 2, 4$ son consecuencia del caso $k = 8$, el caso $k = 3$ es consecuencia de $k = 9$, y por el Teorema Chino del Resto, el caso $k = 6$ es consecuencia de $k = 2$ y $k = 3$, y el caso $k = 10$ es consecuencia de $k = 2$ y $k = 5$.

Utilizando de nuevo el Teorema Chino del Resto, como los números $8, 9, 5, 7$ son primos entre sí, el sistema $x \equiv 7 \pmod{k}, \forall k \in \{8, 9, 5, 7\}$ tiene solución única módulo $2520 = 8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7$, que es $x = 7$.

Concluímos que las soluciones del sistema $x \equiv 7 \pmod{k}, 2 \leq k \leq 10$ son las mismas que las de la congruencia $x \equiv 7 \pmod{2520}$. Estos números son de la forma $x = 7 + 2520k, k \in \mathbb{Z}$.

Por ultimo, ninguno de estos números puede ser un cuadrado, ya que todos ellos cumplen la congruencia $x \equiv 3 \pmod{4}$, pero solo el 1 es un residuo cuadrático módulo 4.

Problema escrito por Rubén García-Valcárcel Sen