Problema 3.7.11 *D. José estudió en un colegio que tenía entre 150 y 300 colegiales. Ahora, aunque no recuerda el número de colegiales que eran, sí se queja de no haber podido practicar ni fútbol, ni baloncesto, ni balonmano porque, cuando en cada deporte se intentaba organizar el colegio en equipos, siempre faltaba o sobraba alguno. ¿Podrías recordar a D. José cuántos colegiales eran?*

Solución:

Denotemos n= número de colegiales.

Ahora bien, el número de jugadores en un equipo de fútbol es 11, en un equipo de baloncesto es 5 y en un equipo de balonmano es 7.

Por tanto, buscamos n tal que

- $n \equiv 1$ ó -1 mód 11
- $n \equiv 1$ ó -1 mód 5
- $n \equiv 1$ ó -1 mód 7

Utilizaremos el Teorema Chino del Resto. Para ello, tenemos que la única solución a nuestro sistema de congruencias módulo $m = 11 \cdot 7 \cdot 5 = 385$ viene dada por

$$n = M_1 M_1' b_1 + M_2 M_2' b_2 + M_3 M_3' b_3$$

donde $b_i \in$ {-1,1}.

Ahora bien, por definición tenemos que

$$M_1 = \frac{m}{m_1} = \frac{385}{11} = 35$$

$$M_2 = \frac{m}{m_2} = \frac{385}{5} = 77$$

$$M_3 = \frac{m}{m_3} = \frac{385}{7} = 55$$

Ahora bien, el Teorema también nos dice quiénes son M_1', M_2' y M_3': $M_i' \equiv M_i^{-1}$ mód m_i, luego $M_1' \equiv 35^{-1}$ mód 11, $M_2' \equiv 77^{-1}$ mód 5 y

$M_3' \equiv 55^{-1}$ mód 7.

Para calcular los respectivos inversos, usaremos el Algoritmo de Euclides y luego haremos el camino inverso para hallarlos:

- $M_1' \equiv 35^{-1}$ mód 11
  35 = 3 · 11 + 2
  11 = 5 · 2 + 1
  $\Rightarrow$ 1 = 11 - 5 · 2 = 11 - 5 · (35 - 3 · 11) = 16 · 11 - 5 · 35
  $\Rightarrow M_1'$ = -5

- $M_2' \equiv 77^{-1}$ mód 5
  77 = 15 · 5 + 2
  5 = 2 · 2 + 1
  $\Rightarrow$ 1 = 5 - 2 · 2 = 5 - 2 · (77 - 15 · 5) = 31 · 5 - 2 · 77
  $\Rightarrow M_2'$ = -2

- $M_3' \equiv 55^{-1}$ mód 7
  55 = 7 · 7 + 6
  7 = 1 · 6 + 1
  $\Rightarrow$ 1 = 7 - 6 = 7 - (55 - 7 · 7) = 7 · 8 - 55 $\Rightarrow M_3'$ = -1

Entonces, nuestra solución será

$$n = 35 \cdot (-5) \cdot (\pm 1) + 77 \cdot (-2) \cdot (\pm 1) + 55 \cdot (-1)(\pm 1)$$

Necesariamente, b_1 y b_2 tienen que ser negativos, ya que si no el número no estaría comprendido entre 150 y 300. Por tanto, sólo nos quedan dos posibilidades:

1. $n = 35 \cdot (-5) \cdot (-1) + 77 \cdot (-2) \cdot (-1) + 55 \cdot (-1) \cdot 1 = 274$
2. $n = 35 \cdot (-5) \cdot (-1) + 77 \cdot (-2) \cdot (-1) + 55 \cdot (-1) \cdot (-1) = 384$

Como el números de colegiales está entre 150 y 300, tenemos que $n = 274$.

Problema hecho por: Loly Soriano