3.7.1. *Se ha escrito un número. Luego se ha escrito otro, permutando las cifras del primero. La diferencia de los dos números es 391738X. ¿Qué dígito es la última cifra representada por X?.*

Sea n un entero cualquiera de k cifras, entonces

$$n = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \cdots + 10^k a_k \equiv \alpha_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k \ (mod\ 9)$$

Llamemos N al primer número de I cifras que se ha escrito y M al segundo, esto es, al primero con sus cifras permutadas. Sea α_i la cifra que ocupa la posición i-ésima del número N y, análogamente, β_i la cifra que ocupa la posición i-ésima de M. Entonces puede establecerse al menos una biyección $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ entre las posiciones de las cifras de los dos números, de tal manera que

$$\forall m, \forall n,\ 0 < m,\ n \leq I,\ \phi(m) = n \Leftrightarrow \alpha_m = \beta_n$$

.

Siendo así, se verifica $\{\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_I\} = \{\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_I\}$ y, por tanto:

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = \sum_{i=1}^{I} \beta_i$$

Esta propiedad es equivalente a afirmar:

$$M \equiv N \ (mod\ 9)$$

Por tanto, tenemos:

$$N + 391738X = M \equiv N \ (mod\ 9)$$

$$391738X \equiv 0 \ (mod\ 9)$$

Por tanto,

$$3 + 9 + 1 + 7 + 3 + 8 + X \equiv 0 \ (mod\ 9)$$

$$31 + X \equiv 0 \ (mod\ 9)$$

$$X \equiv 5 \ (mod\ 9)$$

Y como X sólo puede tomar valores entre 0 y 9 $\Longrightarrow$ **X=5**.

Problema escrito por Jesús de los Nietos Valle.