

3.7.17 Para cada entero positivo n encontrar la última cifra de $13^{n!}$

Solución:

Tenemos que encontrar el resto modulo 10 de $13^{n!}$, lo que es equivalente, por el binomio de Newton, a encontrar el resto modulo 10 de $3^{n!}$.

Veamos primero las congruencias de las potencias de 3:

$$3 \equiv 3 \pmod{10}$$

$$3^2 \equiv 9 \pmod{10}$$

$$3^3 \equiv 7 \pmod{10}$$

$$3^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$3^5 \equiv 3 \pmod{10}$$

...

Con esto ya tenemos resuelto el problema, ya que si $n \geq 4$, entonces tenemos que $3^{n!} = (3^4)^C \equiv 1 \pmod{10}$, con C un natural que depende de n .

Resumiendo:

Si $n=1$, la última cifra es 3.

Si $n=2$, la última cifra es 9.

Si $n=3$, la última cifra es 7.

Si $n \geq 4$, la última cifra es 1.

Problema escrito por Federico Alfaro.