2.2.29. *Demostrar que* $\sum_{n\leq x}(\Omega(n)-\omega(n))^2 = O(x)$.

Solución: Para el resto de la prueba, p y q representan siempre un número primo. Vamos a empezar poniendo la definición de esas funciones, $\Omega(n) = \sum_{p^\alpha|n} 1$ y $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$, por tanto lo que queremos estimar es:

$$\sum_{n\leq x}(\Omega(n)-\omega(n))^2 = \sum_{n\leq x}(\sum_{\substack{p^\alpha|n\\ \alpha\geq 2}} 1)^2.$$

Donde α es un entero mayor o igual a 2 y como mucho será $\log x/\log 2$, así que la suma es finita. Como tenemos una cantidad elevada al cuadrado, podemos poner eso como

$$\sum_{n\leq x}(\Omega(n)-\omega(n))^2 = \sum_{n\leq x}(\sum_{\substack{p^\alpha|n\\ \alpha\geq 2}} 1)(\sum_{\substack{q^\beta|n\\ \beta\geq 2}} 1).$$

Reordenando esas sumas llegamos a

$$\sum_{n\leq x}\sum_{\alpha\geq 2}\sum_{\beta\geq 2}\sum_{p^\alpha|n}\sum_{q^\beta|n} 1.$$

Invertimos el orden de sumación

$$\sum_{\alpha\geq 2}\sum_{\beta\geq 2}\sum_{n\leq x}\sum_{p^\alpha|n}\sum_{q^\beta|n} 1. \tag{1}$$

Y nos fijamos en los tres últimos sumatorios, $\sum_{n\leq x}\sum_{p^\alpha|n}\sum_{q^\beta|n} 1$. de nuevo aquí cambiando el orden de las sumas llegamos a otra expresión más manejable:

$$\sum_{n\leq x}\sum_{p^\alpha|n}\sum_{q^\beta|n} 1 = \sum_{p\leq x}\sum_{q\leq x}\sum_{\substack{n\leq x\\ p^\alpha|n\\ q^\beta|n}} 1.$$

Ahora tenemos que dividir en casos, en el último sumatorio si tenemos que $p\neq q$ entonces sumar 1 por cada n tal que $p^\alpha|n$ y $q^\beta|n$ es lo mismo que sumar 1 cada vez que nos encontremos un n tal que $p^\alpha q^\beta|n$. Por tanto el sumatorio de arriba es igual a

$$\sum_{p\le x}\sum_{q\le x}\sum_{\substack{n\le x\\ p^\alpha|n\\ q^\beta|n}} 1 = \sum_{p\le x}\sum_{\substack{q\le x\\ q\neq p}}\sum_{\substack{n\le x\\ p^\alpha|n\\ q^\beta|n}} 1 + \sum_{p\le x}\sum_{q=p}\sum_{\substack{n\le x\\ p^\alpha|n\\ q^\beta|n}} 1.$$

El caso en que $p \neq q$ es más sencillo ya que tenemos

$$\sum_{p\le x}\sum_{\substack{q\le x\\ q\neq p}}\sum_{\substack{n\le x\\ p^\alpha|n\\ q^\beta|n}} 1 = \sum_{p\le x}\sum_{\substack{q\le x\\ q\neq p}}\sum_{\substack{n\le x\\ p^\alpha q^\beta|n}} 1 = \sum_{p\le x}\sum_{\substack{q\le x\\ q\neq p}} \left\lfloor \frac{x}{p^\alpha q^\beta} \right\rfloor$$

$$\le x \sum_{p\le x}\sum_{\substack{q\le x\\ q\neq p}} \frac{1}{p^\alpha q^\beta} = x\left(\sum_{p\le x}\frac{1}{p^\alpha}\right)\left(\sum_{q\le x}\frac{1}{q^\beta}\right).$$

Y si nos acordamos esto estaba sumado en α y en β por la fórmula (1), por tanto nos queda este primer trozo estimado por

$$\sum_{\alpha\ge 2}\sum_{\beta\ge 2} x\left(\sum_{p\le x}\frac{1}{p^\alpha}\right)\left(\sum_{q\le x}\frac{1}{q^\beta}\right) = x\left(\sum_{\alpha\ge 2}\sum_{p\le x}\frac{1}{p^\alpha}\right)\left(\sum_{\beta\ge 2}\sum_{q\le x}\frac{1}{q^\beta}\right)$$

Y ahora de nuevo invirtiendo el orden de sumación nos queda

$$\le x\left(\sum_{p\le x}\sum_{\alpha\ge 2}\frac{1}{p^\alpha}\right)\left(\sum_{q\le x}\sum_{\beta\ge 2}\frac{1}{q^\beta}\right) = x\left(\sum_{p\le x}\frac{1}{p^2-p}\right)\left(\sum_{q\le x}\frac{1}{q^2-q}\right) = O(x).$$

Donde hemos acotado las dos últimas series por la serie completa (que es convergente ya los términos se comportan como $1/n^2$). Recapitulando, lo que hemos visto es que

$$\sum_{n\le x}(\Omega(n)-\omega(n))^2 = O(x) + \sum_{\alpha\ge 2}\sum_{\beta\ge 2}\sum_{p\le x}\sum_{q=p}\sum_{\substack{n\le x\\ p^\alpha|n\\ q^\beta|n}} 1.$$

Ahora hay que lidiar con ese otro sumando. Para empezar, la condición $p^\alpha|n$ y $q^\beta|n$ se transforma sencillamente en $p^{\max(\alpha,\beta)}|n$. Y lo que tenemos es

$$\sum_{\alpha\geq 2}\sum_{\beta\geq 2}\sum_{p\leq x}\sum_{q=p}\sum_{\substack{n\leq x\\ p^{\max(\alpha,\beta)}|n}} 1 = \begin{cases} \sum_{\alpha\geq 2}\sum_{p\leq x}\sum_{\substack{n\leq x\\ p^{\alpha}|n}} 1 \\ + \\ 2\sum_{\alpha>\beta\geq 2}\sum_{p\leq x}\sum_{\substack{n\leq x\\ p^{\alpha}|n}} 1. \end{cases}$$

Donde lo que hemos hecho ha sido sencillamente separar el caso $\alpha = \beta$ del caso $\alpha \neq \beta$ que por simetría es dos veces el caso $\alpha > \beta \geq 2$. De nuevo, lo que queremos ver es que esas cantidades son $O(x)$. Para la primera procedemos así:

$$\sum_{\alpha\geq 2}\sum_{p\leq x}\sum_{\substack{n\leq x\\ p^{\alpha}|n}} 1 = \sum_{\alpha\geq 2}\sum_{p\leq x}\left\lfloor \frac{x}{p^\alpha}\right\rfloor \leq x\sum_{\alpha\geq 2}\sum_{p\leq x}\frac{1}{p^\alpha} = x\sum_{p\leq x}\sum_{\alpha\geq 2}\frac{1}{p^\alpha}$$

$$= x\sum_{p\leq x}\frac{1}{p^2-p} = O(x).$$

Y en el segundo caso ($\alpha = \max(\alpha,\beta)$):

$$2\sum_{\alpha>\beta\geq 2}\sum_{p\leq x}\sum_{\substack{n\leq x\\ p^{\alpha}|n}} 1 = 2\sum_{\alpha>\beta\geq 2}\sum_{p\leq x}\left\lfloor \frac{x}{p^\alpha}\right\rfloor \leq 2x\sum_{\alpha>\beta\geq 2}\sum_{p\leq x}\frac{1}{p^\alpha}$$

$$= 2x\sum_{p\leq x}\sum_{\beta\geq 2}\sum_{\alpha\geq\beta+1}\frac{1}{p^\alpha} \ll x\sum_{p\leq x}\sum_{\beta\geq 2}\frac{1}{p^{\beta+1}} \ll x\sum_{p\leq x}\frac{1}{p^3} \ll x.$$

Donde he usado la notación de $f \ll g$ cuando quiero decir $f = O(g)$. Por tanto poniendolo todo junto efectivamente sale que

$$\sum_{n\leq x}(\Omega(n)-\omega(n))^2 = O(x).$$

Problema escrito por Diego González Sánchez.