2.2.6. *Demostrar que* $\sum_{m|n} \tau(m^2) = \tau^2(n)$.

Solución: Recordemos que la función $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ es multiplicativa, pues $f(d) = 1$ lo es. Las funciones $\tau(m^2)$ y $\tau^2(n)$ también lo son:

Si $(a, b) = 1$, entonces $(a^2, b^2) = 1$, y:

$$\tau((ab)^2) = \tau(a^2b^2) = \tau(a^2)\tau(b^2)$$
$$\tau^2(ab) = \tau(ab)\tau(ab) = \tau^2(a)\tau^2(b)$$

De nuevo, por la Proposición 2.0.3, la función $\sum_{m|n} \tau(m^2)$ es multiplicativa, y basta comprobar el enunciado para $n = p^\alpha$, con $p = primo$.

Observando que $\tau(p^\alpha) = \alpha + 1$:

$$\sum_{m|p^\alpha} \tau(m^2) = \sum_{i=0}^{\alpha} \tau(p^{2i}) = \sum_{i=0}^{\alpha}(2i+1) = 2\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}+(\alpha+1) = (\alpha+1)^2 = \tau^2(p^\alpha)$$

Problema escrito por Rubén García-Valcárcel Sen