

2.7.12. *Demostrar que*

$$\sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ (m,n)=1}} m = \frac{n\phi(n)}{2}.$$

**Solución:** La observación crucial es que  $(n, m) = 1 \iff (n, n - m) = 1$ . Eso nos permite escribir

$$S = \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ (m,n)=1}} m = \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ (m,n)=1}} (n - m).$$

Por lo tanto

$$2S = \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ (m,n)=1}} (m + (n - m)) = n\phi(n),$$

y de aquí el resultado.

*Problema escrito por Almudena Delgado*