2.2.9. *Demostrar las identidades*

$$\prod_{d|n} d = n^{\tau(n)/2}, \sum_{m|n} \tau(m)^3 = \left(\sum_{m|n} \tau(m) \right)^2$$

Solución: En primer lugar, queremos ver que

$$\prod_{d|n} d = n^{\tau(n)/2}$$

Para ello, dividimos en dos casos:

- n no es cuadrado perfecto: Sabemos que, si d divide a n, entonces, $\frac{n}{d}$ también divide a n. Además, como n no es un cuadrado perfecto, para todo d tal que $d|n$, $d \neq \frac{n}{d}$.

  Entonces, tenemos que:

$$\prod_{d|n} d \cdot \frac{n}{d} = \left(\prod_{d|n} d \right)^2$$

$$\prod_{d|n} d \cdot \frac{n}{d} = \prod_{d|n} n = n^{\tau(n)}$$

  Conclusión: Si n no es cuadrado perfecto, entonces,

$$\prod_{d|n} d = n^{\tau(n)/2}$$

- n es cuadrado perfecto: En este caso, tenemos que:

$$\prod_{d|n} d = \sqrt{n} \prod_{\substack{d|n \\ d\neq\sqrt{n}}} d$$

  Como para el resto de divisores de n, $d \neq \frac{n}{d}$, entonces:

$$\prod_{\substack{d|n \\ d\neq\sqrt{n}}} d \cdot \frac{n}{d} = \prod_{\substack{d|n \\ d\neq\sqrt{n}}} n = n^{\tau(n)-1}$$

De donde obtenemos que:

$$\prod_{\substack{d|n \\ d\neq\sqrt{n}}} d = \left(\prod_{\substack{d|n \\ d\neq\sqrt{n}}} d \cdot \frac{n}{d}\right)^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{\tau(n)-1}{2}}$$

Por tanto:

$$\prod_{d|n} d = \sqrt{n} \prod_{\substack{d|n \\ d\neq\sqrt{n}}} d = n^{1/2} n^{\frac{\tau(n)-1}{2}} = n^{\tau(n)/2}$$

Conclusión: Si n es cuadrado perfecto, entonces,

$$\prod_{d|n} d = n^{\tau(n)/2}$$

Por tanto, se cumple.

Ahora, queremos probar la otra fórmula:

$$\sum_{m|n} \tau(m)^3 = \left(\sum_{m|n} \tau(m)\right)^2$$

En primer lugar, tenemos que $\tau(n)$ es multiplicativa. Por tanto, $\tau^3(n)$, $\sum_{d|n} \tau(n)$ y $\sum_{d|n} \tau^3(n)$ son multiplicativas. Entonces, basta con demostrar la igualdad para p^α.

$$\tau(p^\alpha) = (\alpha + 1)$$

Además, como todos los divisores de p^α son de la forma p^β con $0 \leq \beta \leq \alpha$, entonces, se cumple que:

$$\sum_{d|p^\alpha} \tau(d) = \sum_{k=0}^{\alpha} (k+1) = \sum_{k=1}^{\alpha+1} k =$$

$$= \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}$$

Luego

$$\left(\sum_{d|p^\alpha} \tau(d)\right)^2 = \frac{1}{4}(\alpha+1)^2(\alpha+2)^2$$

Ahora:

$$\sum_{d|p^\alpha} \tau(d)^3 = \sum_{k=0}^{\alpha}(k+1)^3 = \sum_{k=1}^{\alpha+1} k^3$$

Entonces, basta demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

Lo probaremos por inducción:

- $n = 1$

$$1 = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot (1+1)^2 = 4/4 = 1$$

- *Caso general:* Suponemos cierto para n. Queremos ver para $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 =$$

$$= \frac{1}{4}(n+1)^2[n^2+4n+4] =$$

$$= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(n+1)^2((n+1)+1)^2$$

Por tanto, se cumple que:

$$\sum_{m|n} \tau(m)^3 = \left(\sum_{m|n} \tau(m)\right)^2$$

Problema escrito por Javier Sanz-Cruzado Puig