2.2.8. *Demostrar que, dado $k \geq 1$, la suma de los inversos de los enteros positivos con exactamente k divisores es convergente $\Leftrightarrow$ k es impar.*

Solución: Ya sabemos que $\tau(n)$ es impar si y sólo si n es uncuadrado. Así que si k es impar tenemos que

$$\sum_{\tau(n)=k} \frac{1}{n} \leq \sum_{n \text{ cuadrado}} \frac{1}{n} = \sum_{m} \frac{1}{m^2} < \infty.$$

Suongamos que k es par, digamos $k = 2m$. Todos los enteros de la forma $n = 2^{m-1}p$ con p primo impar tienen $\tau(n) = 2m$ divisores. Así que

$$\sum_{\tau(n)=2m} \frac{1}{n} \geq \sum_{p} \frac{1}{2^{m-1}p} = \infty.$$

Problema escrito por Julio Aroca y J. Cilleruelo