2.2.7. *Demostrar que* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^2} = \frac{\pi^4}{36}$

Solución:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sum\limits_{a|n} 1\right)}{n^2} = \sum\limits_{n\leq\infty} \left(\frac{\sum\limits_{a\cdot b=n} 1}{n^2}\right) = \sum\limits_{a\cdot b\leq\infty} \frac{1}{a^2\cdot b2} = \left(\sum\limits_{a\leq\infty} \frac{1}{a^2}\right)\cdot\left(\sum\limits_{b\leq\infty} \frac{1}{b^2}\right) =$
$(\zeta(2))^2 = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2 = \frac{\pi^4}{36}$ ■

Recordemos que la función zeta de Riemann se define de la siguiente forma: $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ con s un número complejo.

Problema escrito por Jesús de los Nietos Valle.