

2.2.4. *Demostrar que n es perfecto si y sólo si $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2$*

Sabemos que n es perfecto sii $\sigma(n) = \sum_{d|n} d = 2n$, entonces, sean $\{d_1, \dots, d_N\}$ todos los divisores de n

$$\begin{aligned} 2n &= \sum_{d|n} d = d_1 + d_2 + \dots + d_N \iff \\ 2 &= \frac{d_1}{n} + \frac{d_2}{n} + \dots + \frac{d_N}{n} = \\ \frac{1}{n/d_1} + \frac{1}{n/d_2} + \dots + \frac{1}{n/d_N} &= \\ \frac{1}{d_{i_1}} + \frac{1}{d_{i_2}} + \dots + \frac{1}{d_{i_N}} &= \sum_{d|n} \frac{1}{d} \end{aligned}$$

donde los d_{i_j} no son más que los divisores de n “reordenados” pues cada uno de los cocientes $\frac{n}{d_i}$, $i = 1, \dots, N$ son divisores de n y no falta ninguno pues n tiene N divisores y $\frac{n}{d_i} = \frac{n}{d_j} \iff d_i = d_j$.

Problema escrito por Óscar Losada Suárez