2.2.32. *Demostrar el Teorema 2.1.10.*

Solución: Para demostrar este resultado, vamos a usar lo probado en el ejercicio 2.2.31, que dice que

$$|\{n \le x : |\Omega(n) - \log\log x| > (\log\log x)^{1/2+\epsilon/2}\}| = O\left(\frac{x}{(\log\log x)^{\epsilon}}\right).$$

Para empezar, voy a definir dos conjuntos:

$$A_x = \{n \le x : |\Omega(n) - \log\log x| > (\log\log x)^{1/2+\epsilon/2}\}$$

y

$$\tilde{A}_x = \{n \le x : |\Omega(n) - \log\log x| \le (\log\log x)^{1/2+\epsilon/2}\}.$$

Está claro que estos conjuntos son complementarios en el sentido que dado un número $n \le x$ estará en uno (y sólo uno) de los conjuntos anteriores.

Si volvemos al problema inicial, tengo que estimar de algún modo cuántas entradas distintas hay en la tabla de multiplicar de x (entendiendo que es la tabla que va hasta $\lfloor x \rfloor$, $M(x) = M(\lfloor x \rfloor)$). La idea es la siguiente, por el ejercicio 2.2.31 sabemos que si cogemos *al azar* un número entre 1 y x, ese número tendrá del orden de $\log\log x$ divisores contando multiplicidades. Si cogemos ahora dos números $a, b \le x$, lo más *probable* es coger ambos en $\tilde{A}_x$ y por tanto tendrán cada uno de ellos $\log\log x$ divisores más o menos. Como $\Omega(ab) = \Omega(a) + \Omega(b)$, la entrada ab de la tabla de multiplicar de x tendrá más o menos $2\log\log x$ divisores y por tanto estará en A_{x^2}, pero por el ejercicio 2.2.31, la cantidad de números que hay en A_{x^2} es *pequeña* (será del orden de $x^2/(\log\log x^2)^{\epsilon}$).

Ahora vamos a formalizar esto. Para empezar, dado un $\epsilon > 0$ (luego pondremos restricciones a este número) queremos ver que si $a, b \in \tilde{A}_x$ entonces $ab \in A_{x^2}$ (para x suficientemente grande). Para ver esto último, tenemos que ver que $|\Omega(ab) - \log\log x^2| > (\log\log x^2)^{1/2+\epsilon/2}$.

$$\begin{aligned}|\Omega(ab) - \log\log x^2| &= |\Omega(a) + \Omega(b) - \log\log x - \log 2| \\ &\ge |\Omega(a)| - |\Omega(b) - \log\log x| - \log 2.\end{aligned}$$

Usando que $a, b \in \tilde{A}_x$ para estimar que $|\Omega(b) - \log\log x| \le (\log\log x)^{1/2+\epsilon/2}$ y $(\log\log x)^{1/2+\epsilon/2} \ge \log\log x - |\Omega(a)|$ lo que nos permite llegar a

$$|\Omega(ab) - \log\log x^2| \geq \log\log x - 2(\log\log x)^{1/2+\epsilon/2} - \log 2.$$

Y llegados aquí está claro que si suponemos $\epsilon < 1$ (para que el término principal sea $\log\log x$) podemos concluir que para x suficientemente grande

$$|\Omega(ab) - \log\log x^2| > (\log\log x^2)^{1/2+\epsilon/2}$$

(recordemos que $\log\log x^2 = \log\log x + \log 2$).

Y con esto ya hemos probado lo dificil, ahora sólo falta ver qué pasa con el resto de términos. Ya hemos visto que si cojo dos de $\tilde{A}_x$ en la tabla de multiplicar tendré un número menor o igual a x^2 y que está en A_{x^2}. Como el número de elementos de A_{x^2} ya lo tengo estimado por el ejercicio 2.2.31, de este tipo de términos me encontraré (como mucho) $O(x^2/(\log\log x^2)^\epsilon$.

Para el resto de términos, si cojo uno de $\tilde{A}_x$ y otro de A_x, puedo estimar cuántos elementos distintos tendrán el la tabla de multiplicar, y acotando por arriba (suponiendo que todos me salen distinto), puedo acotar este número por $|\tilde{A}_x||A_x| \leq xO(x/(\log\log x)^\epsilon) \ll x^2/(\log\log x)^\epsilon$. Y por último otro tanto si cojo dos de A_x, como mucho el número de productos distintos serán $|A_x|^2 \ll x^2/(\log\log x)^{2\epsilon}$. Juntándolo todo llegamos a

$$M(x) \ll \frac{x^2}{(\log\log x^2)^\epsilon} + \frac{x^2}{(\log\log x)^\epsilon} + \frac{x^2}{(\log\log x)^{2\epsilon}}.$$

Usando las propiedades del logaritmo y quedándonos con el término más grande llegamos a

$$M(x) \ll \frac{x^2}{(\log\log x)^\epsilon}$$

donde $\epsilon \in (0,1)$, lo que prueba el resultado buscado.

Problema escrito por Diego González Sánchez.