2.2.31. *Demostrar que para todo $\epsilon > 0$ se tiene que*

$$|\{n \leq x : |\Omega(n) - \log\log x| > (\log\log x)^{1/2+\epsilon/2}\}| = O\left(\frac{x}{(\log\log x)^{\epsilon}}\right).$$

Solución: Definimos

$$A_x = \{n \leq x : |\Omega(n) - \log\log x| > (\log\log x)^{1/2+\epsilon/2}\}.$$

Al sumar sobre todos los $n \in A_x$ tenemos que

$$\sum_{n \in A_x} (\Omega(n) - \log\log x)^2 > \sum_{n \in A_x} (\log\log x)^{1+\epsilon} = |A_x|(\log\log x)^{1+\epsilon}.$$

Despejando el cardinal de A_x nos queda

$$|A_x| < \frac{\sum_{n \in A_x}(\Omega(n) - \log\log x)^2}{(\log\log x)^{1+\epsilon}} \leq \frac{\sum_{n \leq x}(\Omega(n) - \log\log x)^2}{(\log\log x)^{1+\epsilon}} \ll$$

$$\frac{x\log\log x}{(\log\log x)^{1+\epsilon}} \ll \frac{x}{(\log\log x)^{\epsilon}}.$$

Problema escrito por Diego González Sánchez.