2.2.3. *Caracterizar los números que tienen 60 divisores.*

Solución: Buscamos los números $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tau(n) = 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

Por el Teorema Fundamental de la Aritmética, n puede descomponerse de forma única como producto de primos:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} p_4^{\alpha_4}$$

El número de divisores de n se expresa como:

$$\tau(n) = \sum_{d|n} d = \prod_{i=1}^{r} (\alpha_i + 1)$$

Por tanto, basta con hallar las posibles distribuciones de $\{2, 2, 3, 5\}$ en 1, 2, 3 y 4 grupos. El producto de los números del grupo i-ésimo será una unidad mayor que el exponente α_i de la descomposición en factores primos de n previamente descrita.

Hagamos un estudio analítico de las distintas situaciones:

- $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$
  $n = p_1^{59}$ *con* $G_1 = \{2, 2, 3, 5\}$

- $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$
  $n = p_1^2 \cdot p_2^{19}$ *con* $G_1 = \{3\}$ *y* $G_2 = \{2, 2, 5\}$
  $n = p_1^1 \cdot p_2^{29}$ *con* $G_1 = \{2\}$ *y* $G_2 = \{2, 3, 5\}$
  $n = p_1^4 \cdot p_2^{11}$ *con* $G_1 = \{5\}$ *y* $G_2 = \{2, 2, 3\}$
  $n = p_1^3 \cdot p_2^{14}$ *con* $G_1 = \{2, 2\}$ *y* $G_2 = \{3, 5\}$
  $n = p_1^5 \cdot p_2^9$ *con* $G_1 = \{2, 3\}$ *y* $G_2 = \{2, 5\}$

- $\alpha_4 = 0$
  $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3^{14}$ *con* $G_1 = \{2\},\ G_2 = \{2\}$ *y* $G_3 = \{3, 5\}$
  $n = p_1 \cdot p_2^2 \cdot p_3^9$ *con* $G_1 = \{2\},\ G_2 = \{3\}$ *y* $G_3 = \{2, 5\}$
  $n = p_1 \cdot p_2^4 \cdot p_3^5$ *con* $G_1 = \{2\},\ G_2 = \{5\}$ *y* $G_3 = \{2, 3\}$
  $n = p_1^2 \cdot p_2^4 \cdot p_3^3$ *con* $G_1 = \{3\},\ G_2 = \{5\}$ *y* $G_3 = \{2, 2\}$

- $\alpha_i > 0$ i=1, 2, 3, 4.
  $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3^2 \cdot p_4^4$ *con* $G_1 = \{2\},\ G_2 = \{2\},\ G_3 = \{3\}$ *y* $G_4 = \{5\}$

Por tanto, existen 11 factorizaciones diferentes de n como producto de números primos de tal forma que se verifica que n tiene, efectivamente, 60 divisores.

Problema escrito por Jesús de los Nietos Valle.