2.2.23. *Sea* $r_3(n) = \#\{n = x^2 + y^2 + z^2 : \ x, y, z \in \mathbb{Z}\}$. *Hallar una fórmula asintótica para* $R_3(x) = \sum_{n \leq x} r_3(n)$.

Solución:

Sea Q_ν el cubo de lado unidad con $\nu \in \mathbb{Z}^3$, el vértice inferior izquierdo de la cara posterior.

$$R_3(x) = \sum_{n \leq x} r_3(n) = |\{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 : \ a^2+b^2+c^2 \leq x\}| = Volumen(\bigcup_{|\nu| \leq \sqrt[2]{x}} Q_\nu).$$

Calculemos la diagonal del cubo:

$1^2 + (\sqrt[2]{2})^2 = d^2 \Rightarrow d = \sqrt[2]{3})$.

Por tanto, vamos a estimar $R_3(x)$ estableciendo una cota del volumen de la esfera de radio $\sqrt[2]{x}$ por arriba y por abajo:

$\frac{4}{3}\pi(\sqrt[2]{x} - \sqrt[2]{3})^3 \leq R_3(x) \leq \frac{4}{3}\pi(\sqrt[2]{x} + \sqrt[2]{3})^3$

Y ahora desarrollamos la expresión utilizando el Binomio de Newton.

$\frac{4}{3}\pi(x^{3/2}\binom{3}{0} - \sqrt[2]{3} \cdot x\binom{3}{1} + 3 \cdot \sqrt[2]{x}\binom{3}{2} - 3^{3/2}\binom{3}{3}) \leq R_3(x) \leq \frac{4}{3}\pi(x^{3/2}\binom{3}{0} + \sqrt[2]{3} \cdot x\binom{3}{1} + 3 \cdot \sqrt[2]{x}\binom{3}{2} + 3^{3/2}\binom{3}{3})) \equiv$

$$\frac{4}{3}\pi(x^{3/2} - 3\sqrt[2]{3} \cdot x + 9 \cdot \sqrt[2]{x} - 3\sqrt[2]{3}) \leq R_3(x) \leq \frac{4}{3}\pi(x^{3/2} + 3\sqrt[2]{3} \cdot x + 9 \cdot \sqrt[2]{x} + 3\sqrt[2]{3}) \equiv$$

$$\frac{4}{3}\pi(-3\sqrt[2]{3} \cdot x + 9 \cdot \sqrt[2]{x} - 3\sqrt[2]{3}) \leq R_3(x) - \frac{4}{3}\pi \cdot x^{3/2} \leq \frac{4}{3}\pi(3\sqrt[2]{3} \cdot x + 9 \cdot \sqrt[2]{x} + 3\sqrt[2]{3}) \equiv$$

$$R_3(x) = \frac{4}{3}\pi \cdot x^{3/2} + O(x)$$

Problema escrito por Jesús de los Nietos Valle.