2.2.20. *La función de Mandgoldt se define de la siguiente manera:*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{si } n \text{ es una potencia de un primo } p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostrar que $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log\ n$ *y que* $\sum_{d|n} \mu(d)\ \log\ d = -\Lambda(n)$. *Demostrar también que* $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$

Solución:

1. Demostrar que $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log\ n$

   Por el Teorema Fundamental de la Aritmética, $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$.

   $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{\alpha_j} \Lambda(p_j^i) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{\alpha_j} \log(p_j) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \log(p_j) = \sum_{j=1}^{r} \log(p_j^{\alpha_j}) =$
   $\log(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}) = \log(n)$

2. Demostrar que $\sum_{d|n} \mu(d)\ \log\ d = -\Lambda(n)$.

   Utilizando que $\sum_{d|m} \mu(d) = 1$ si $m = 1$ y vale 0 si $m > 1$, podemos escribir

   $$\Lambda(n) = \sum_{c|n} \left(\sum_{d|(n/c)} \mu(d) \right) \Lambda(c) = \sum_{\substack{d,c \\ cd|n}} \mu(d)\Lambda(c) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{c|(n/d)} \Lambda(c) = \sum_{d|n} \mu(d) \log(n/d).$$

   En la última igualdad hemos utilizado el apartado 1. Tenemos entonces que

   $$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log n - \sum_{d|n} \mu(d) \log d = -\sum_{d|n} \mu(d) \log d.$$

3. Demostrar que $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$

   Primera demostración: Utilizando las identidades

   $$\zeta'(s) = -\sum_{n=1} \frac{\log n}{n^s}, \qquad \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

y el apartado anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= -\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log m}{m^s}\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\mu(l)}{l^s}\right) = -\sum_{m,l}\frac{\mu(l)\log m}{(lm)^s} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{\substack{m,l\\ ml=n}}\mu(l)\log m}{n^s} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{l|n}\mu(l)\log(n/l)}{n^s} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{l|n}\mu(l)\log n}{n^s} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{l|n}\mu(l)\log l}{n^s} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}
\end{aligned}$$

Segunda demostración: Recordando que $\zeta(s) = \prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$ tenemos que

$$\log\zeta(s) = -\sum_p \log\left(1-\frac{1}{p^s}\right).$$

Al derivar en los dos lados obtenemos

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \frac{(\log p)p^{-s}}{1-\frac{1}{p^s}} = -\sum_p \frac{\log p}{p^s}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p^{ms}} = -\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log p}{p^{ms}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Problema escrito por Jesús de los Nietos Valle y J. Cilleruelo.