2.2.2. *Demostrar que la función $f(n) = [\sqrt{n}] - [\sqrt{n-1}]$ es multiplicativa pero no completamente multiplicativa.*

Solución: Observemos primero como se comporta la función $f(n,m) = [\sqrt{nm}] - [\sqrt{nm-1}]$:

$$f(n,m) = \begin{cases} 1 & \text{si } nm \textit{ es un cuadrado} \\ 0 & \text{si } nm \textit{ no es un cuadrado} \end{cases}$$

Si $(n,m) = 1$ con $n, m \neq 1 \Rightarrow nm$ no es un cuadrado a no ser que n y m sean ambos un cuadrado. De esta manera:

Si n y m son ambos cuadrados $\Rightarrow f(n) = f(m) = 1 = f(nm)$, porque nm es también un cuadrado.

Si uno es un cuadrado y otro no (supongamos n no es un cuadrado) $\Rightarrow f(n) = 0, f(m) = 1$ y por tanto $f(n)f(m) = 0 = f(nm)$, porque al ser $(n,m) = 1$ $\Rightarrow nm$ no es un cuadrado.

Si ninguno de los dos es un cuadrado $f(n)f(m) = 0 = f(nm)$ por la misma razón que antes.

Esto hace de la función $f(n)$ una función multiplicativa.

Sin embargo no es completamente multiplicativa, ya que si $(n,m) \neq 1$ puede ocurrir que n y m no sean cuadrados, pero nm sí (como por ejemplo si tomamos $n = m$, con n, m no cuadrados) lo que implica que $f(n)f(m) = 0 \neq 1 = f(nm)$.

Problema escrito por Julio Aroca