2.2.18. *Buscar todos los enteros tales que a) $\phi(n) = \frac{n}{2}$, b) $\phi(n) = \phi(2n)$, c) $\phi(n) = 12$*

Solución:

a) $\phi(n) = n/2$
Si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$, podemos expresar $\phi(n)$ de la siguiente manera:

$$\phi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = n \cdot \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{p_i - 1}{p_i}\right)$$

Sabemos que

$$\prod_{i=1}^{r} \left(\frac{p_i - 1}{p_i}\right) < 1$$

y, en caso de que haya más de un primo en la factorización, entonces, el denominador de esa fracción irreducible va a ser impar (Esto se debe a que $p_i - 1$ es par y p_i impar para todo i, salvo que $p_i = 2$. En este caso, p_i divide a $p_j - 1$ para todo $j \neq i$).

Entonces, $n = p^\alpha$. Pero

$$\left(\frac{p-1}{p}\right) = \frac{1}{2}$$

Por tanto, $p = 2$, y todos los enteros que cumplen

$$\phi(n) = \frac{n}{2}$$

son de la forma

$$n = 2^\alpha$$

con $\alpha \geq 1$.

b) $\phi(n) = \phi(2n)$
Dividimos en dos casos:

- <u>n par:</u> $n = 2^k p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$ con $p_i \neq 2$ $\forall i \in \{1, ..., r\}$.

  En este caso, tenemos lo siguiente:

$$\phi(n) = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

$$\phi(2n) = 2n \cdot \frac{1}{2} \cdot \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = 2\phi(n)$$

Por tanto, si n es par, $\phi(n) \neq \phi(2n)$.

- $\underline{n \text{ impar:}}$ $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$ con $p_i \neq 2\ \forall i \in \{1, ..., r\}$.

  En este caso, 2 no divide a n, por lo que es un nuevo factor primo de $2n$. Entonces:
  $$\phi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$
  con $p_i \neq 2\ \forall i \in \{1, ..., r\}$.
  $$\phi(2n) = 2n \cdot \frac{1}{2} \cdot \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = n \cdot \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \phi(n)$$
  Luego, si n es impar, $\phi(n) = \phi(2n)$.

c) $\phi(n) = 12$

Sabemos que $12 = 2^2 \cdot 3$. Entonces, podemos escribir $\phi(n)$ como:

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^{r} \left(p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1}\right)$$

Supongamos que n no es de la forma $2 \cdot p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$ con $p_i \neq 2 \forall i$. Entonces, tenemos que n ha de ser, como mucho, de la forma

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$$

con $p_i \neq 2$ si $\alpha_i = 1$.

Estudiemos los casos posibles:

- $n = p^{\alpha}$

  En este caso, $\phi(n) = p^{\alpha} - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p-1) = 12$ Luego, $p-1$ divide a 12, y es p es, por tanto, $3, 5, 7$ o 13. Con dichos números, la única posibilidad es 13, por lo que $n = 13$.

- $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$

  En este caso, $\phi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1})(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}) = 12$ Por tanto, ambos factores tienen que ser divisores de 12. Tenemos 2 casos:

  CASO 1: $p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) = 4$, $p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) = 3$

  En este caso, la segunda ecuación no tiene solución, ya que el único primo tal que $p - 1$ divide a 3 es 2, y $2^k \neq 3$ para ningún k. Por tanto, este caso no da ningún resultado.

  CASO 2: $p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) = 2$, $p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) = 6$

  En este caso, la primera ecuación tiene como soluciones $p_1 = 3, \alpha_1 = 1$ y $p_1 = 2, \alpha_2 = 2$, y la segunda $p_2 = 3, \alpha_2 = 2$ y $p_2 = 7, \alpha_2 = 1$. Por tanto, de aquí obtenemos los casos $n = 21, 28$ y 36.

- $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$

  En este caso, volveríamos a encontrarnos con la ecuación $p^{\alpha - 1}(p_{-}1) = 3$, que no tiene solución, por lo que ningún n es de esta forma.

Además, por el apartado b, obtenemos $n = 26$ y 42.
Por tanto, los enteros que cumplen que $\phi(n) = 12$ son:

$$\{13, 21, 26, 28, 36, 42\}$$

Problema escrito por Javier Sanz-Cruzado Puig