2.2.16. *Demostrar que*

$$\frac{1}{2} < \frac{\sigma(n)\phi(n)}{n^2} \leq 1.$$

Solución: Recordamos que

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^{r} \Big(1 - \frac{1}{p_i}\Big)$$

y utilizando que podemos expresar n como producto de potencias de primos (por el Teorema Fundamental de la Aritmética), obtenemos

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \left(\frac{p_i - \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}}{p_i - 1}\right) \\ &= n \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{1 - \frac{1}{p_i^{\alpha_i+1}}}{1 - \frac{1}{p_i}}\right).\end{aligned}$$

Entonces, haciendo el producto, tenemos que

$$\sigma(n)\phi(n) = n^2 \prod_{i=1}^{r} \Big(1 - \frac{1}{p_i}\Big) \left(\frac{1 - \frac{1}{p_i^{\alpha_i+1}}}{1 - \frac{1}{p_i}}\right) = n^2 \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i^{\alpha_i+1}}\right).$$

Por lo tanto,

$$\frac{\sigma(n)\phi(n)}{n^2} = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i^{\alpha_i+1}}\right)$$

Observamos que $(1 - p_i^{-(\alpha_i+1)}) < 1$ para todo $i = 1, ..., r$. Por lo tanto, sabemos que su producto esta acotado por 1. Por otro lado, sabemos que $p_i \leq p_i^{\alpha_i}$, lo cual implica que

$$\left(1 - \frac{1}{p_i^{1+1}}\right) = \left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right) \leq \left(1 - \frac{1}{p_i^{\alpha_i+1}}\right)$$

Así, obtenemos que

$$\prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right) \leq \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i^{\alpha_i+1}}\right) \leq 1.$$

Como $\zeta(2) = 6/\pi^2 > 1/2$ coincide con la cota inferior, obtenemos el resultado.

Problema escrito por Patrizio Guagliardo, Monica Coppo