2.2.14. *Demostrar que el conjunto* $\{\frac{\phi(n)}{n}, n \geq 1\}$ *es denso en el intervalo* $[0,1]$.

Solución: Recordemos que $\phi(n)$ es multiplicativa, y que por tanto, $\frac{\phi(n)}{n}$ también lo es. Además, $\frac{\phi(p^i)}{p^i} = 1 - \frac{1}{p}$, por lo que vamos a fijarnos únicamente en los números libres de cuadrados.

Veamos que la función $f(n) = \prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{1}{p_i}) \to 0$, utilizando que $1 - x \leq e^{-x}$:

$$f(n) \leq \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{1}{p_i}} = exp(-\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}) \xrightarrow{n \to \infty} e^{-\infty} = 0$$

Observamos que $\forall n, 0 \leq f(n) \leq 1$, ya que es un producto de números entre 0 y 1. Y además, $f(n)$ es estrictamente decreciente, pues $\forall i \geq 1, 0 < 1 - \frac{1}{p_i} < 1$. Por lo tanto, la convergencia a 0 es monótona: $f(n) \searrow 0$.

Para demostrar que el conjunto es denso en $[0,1]$, vamos a escoger un $r \in [0,1]$ y $\epsilon > 0$ cualesquiera, y vamos a buscar un $n \geq 1$ tal que $|\frac{\phi(n)}{n} - r| < \epsilon$. Como existen primos arbitrariamente grandes, escogemos el primo k-ésimo, p_k, que cumpla $p_k > \frac{1}{\epsilon}$. Por lo tanto, para p_k y todos los primos sucesivos, tenemos que $1 - \epsilon < (1 - \frac{1}{p}) < 1$.

Definimos la función $g(n) = \prod_{i=k}^{k+n}(1 - \frac{1}{p_i})$. Observamos que cumple las siguientes propiedades:

- $|g(0) - 1| = \frac{1}{p_k} < \epsilon$
- $0 \leq g(n) - g(n+1) \leq \epsilon$, ya que $g(n) - g(n+1) = \frac{1}{p_{k+n+1}} \prod_{i=k}^{k+n}(1 - \frac{1}{p_i}) < \frac{1}{p_{k+n+1}}$
- $g(n) \searrow 0$ al igual que la función f.

Por lo tanto, podemos encontrar un N tal que $|g(N) - r| < \epsilon$. Concluímos con esto, ya que:

$$g(N) = \frac{\phi(\prod_{i=k}^{k+N} p_i)}{\prod_{i=k}^{k+N} p_i}$$

Problema escrito por Rubén García-Valcárcel Sen