2.2.13. *Calcular* $\limsup_{n\to\infty} \frac{\phi(n)}{n}$ *y* $\liminf_{n\to\infty} \frac{\phi(n)}{n}$.

Solución: Como $0 \leq \phi(n) \leq n$, tenemos que $0 \leq \frac{\phi(n)}{n} \leq 1$, y por tanto los límites superior e inferior también estarán entre 0 y 1.

Tomando la sucesión $\frac{\phi(p_n)}{p_n} = 1 - \frac{1}{p_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, vemos que:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\phi(n)}{n} = 1$$

.

Tomando la sucesión $x_n = \prod_{i=1}^{n} p_n$, y usando $1 - x \leq e^{-x}$, vemos que:

$$\frac{\phi(x_n)}{x_n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\phi(p_i)}{p_i} = \prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{1}{p_i}) \leq \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{1}{p_i}} = exp(-\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}) \xrightarrow{n\to\infty} e^{-\infty} = 0$$

y por tanto:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\phi(n)}{n} = 0$$

Problema escrito por Rubén García-Valcárcel Sen