2.2.11. *Demostrar que para todo $\epsilon > 0$ se tiene $\tau(n) = O(n^\epsilon)$. Demostrar también que la estimación $\tau(n) = O((\log n)^r)$ no es cierta para ningún r.*

Solución: Está claro que la constante implícita tiene que depender de ϵ. Sea $n = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$, nosotros queremos ver que para todo n el cociente $\tau(n)/n^\epsilon$ está acotado. Si sustituimos esa expresión por su factorización en primos tenemos

$$\frac{\tau(n)}{n^\epsilon} = \prod_{i=1}^{k} \frac{(1+\alpha_i)}{p_i^{\epsilon\alpha_i}}.$$

Ahora dividimos este productorio en dos trozos (si existen, si no sólo uno de ellos). Primero, sea i_0 tal que para todo $i \geq i_0$ se cumple que $p_i^\epsilon \geq e$, o lo que es lo mismo, $\epsilon \log p_i \geq 1$ (está claro que el número i_0 depende de ϵ). Ahora hacemos la estimación:

$$\prod_{i=i_0}^{k} \frac{(1+\alpha_i)}{p_i^{\epsilon\alpha_i}} \leq \prod_{i=i_0}^{k} \frac{e^{\alpha_i}}{p_i^{\epsilon\alpha_i}} = \prod_{i=i_0}^{k} e^{\alpha_i(1-\epsilon\log p_i)} \leq 1.$$

Y por otra parte, ahora tenemos que acotar

$$\prod_{i=1}^{i_0-1} \frac{(1+\alpha_i)}{p_i^{\epsilon\alpha_i}} \leq \prod_{i=1}^{i_0-1} \frac{(1+\alpha_i)}{2^{\epsilon\alpha_i}}.$$

Sea ahora $f(t) = (1+t)/2^{\epsilon t}$. Está claro que $f(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, por tanto existe T tal que si $t \geq T$ entonces $|f(t)| < 1$. Por otra parte, como $|f(t)|$ es continua en el compacto $[0,T]$ alcanza ahí su máximo, pongamos M. Con lo que hemos probado que $|f(t)| \leq \max(1,M) = K$ para todo $t \in [0,\infty)$. Con esto ya tenemos la otra cota

$$\prod_{i=1}^{i_0-1} \frac{(1+\alpha_i)}{p_i^{\epsilon\alpha_i}} \leq \prod_{i=1}^{i_0-1} f(\alpha_i) \leq K^{i_0-1},$$

con lo que

$$\frac{\tau(n)}{n^\epsilon} \leq K^{i_0-1}.$$

Y esto ya prueba que $\tau(n) = O(n^\epsilon)$. Ahora hay que ver la estimación $\tau(n) = O((\log n)^r)$ es falsa para cualquier $r > 0$. Dado cualquier $r > 0$ vamos a ver que existen una sucesión de números n_m tal que $\tau(n_m)/(\log n_m)^r$ se va a infinito cuando $m \to \infty$. Sea k un entero mayor a r, tomamos $n_m = (p_1 ... p_k)^m$ (donde los p_i son los primeros k primos). Se tiene

$$\frac{\tau(n_m)}{(\log n_m)^r} = \frac{(m+1)^k}{m^r(\log p_1 ... p_k)^r} \xrightarrow[m \to \infty]{} \infty,$$

por tanto la estimación $\tau(n) = O((\log n)^r)$ es falsa para cualquier r.

Problema escrito por Diego González.