2.2.10. *Demostrar que un número perfecto impar no puede ser de la forma $p^\alpha q^\beta$, con p, q primos. Demostrar que tampoco de la forma $p^\alpha q^\beta r^\gamma$, con p, q, r primos distinto.*

Solución: Un número entero positivo N es perfecto si $\frac{\sigma(N)}{N} = 2$.

Sea $N = p^\alpha$ con p primo impar y supongamos que N es un número impar perfecto. Como $\sigma(p^\alpha) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$, observamos que

$$\sigma(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} < \frac{p^\alpha p}{p-1} \implies \frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} < \frac{p}{p-1} \leq \frac{3}{2} < 2$$

ya que $p \geq 3$, entonces N no puede ser un número perfecto.

Sean ahora p y q dos números primos impares con $p < q$ y supongamos que $N = p^\alpha q^\beta$ es un número impar perfecto. Como σ es multiplicativo, obtenemos que

$$\sigma(p^\alpha q^\beta) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} \cdot \frac{q^{\beta+1}-1}{q-1} < \frac{p^\alpha p}{p-1} \cdot \frac{q^\beta q}{q-1}$$

,

lo cual implica que

$$\frac{\sigma(p^\alpha q^\beta)}{p^\alpha q^\beta} < \frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8} < 2$$

.

Por tanto, $\frac{\sigma(N)}{N} < 2$ y entonces N no es un número perfecto.

Sean ahora p, q y r tres números primos impares con $p < q < r$ y supongamos que $N = p^\alpha q^\beta r^\gamma$ es un número impar perfecto. Como σ es multiplicativo, obtenemos que

$$\sigma(p^\alpha q^\beta r^\gamma) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} \cdot \frac{q^{\beta+1}-1}{q-1} \cdot \frac{r^{\gamma+1}-1}{r-1} < \frac{p^\alpha p}{p-1} \cdot \frac{q^\beta q}{q-1} \cdot \frac{r^\gamma r}{r-1}$$

,

lo cual implica que

$$\frac{\sigma(p^\alpha q^\beta r^\gamma)}{p^\alpha q^\beta r^\gamma} < \frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1} \cdot \frac{r}{r-1} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} = \frac{105}{48}(????) < 2.$$

Problema escrito por Patrizio Guagliardo