

2.2.1. *El conserje de un hotel cierra todas las puertas el primer día, el segundo día abre las pares, el tercer día vuelve (si estaba abierta la cierra y viceversa) las múltiplos de 3, el cuarto día las múltiplos de 4, etcétera. ¿Qué puertas quedarán cerradas al final del proceso?*

Solución: El problema se reduce a calcular la cantidad de divisores de un determinado número, ya que el estado de la puerta n cambiará de abierto a cerrado tantas veces como divisores tenga n .

Sea $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema Fundamental de la Aritmética, admite una única factorización como producto de primos.

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

Calculamos el número de divisores de n .

$$\tau(n) = \sum_{d|n} d = \prod_{i=1}^r (\alpha_i + 1)$$

Es fácil observar que la puerta quedará abierta siempre y cuando se produzca un número par de cambios de estado. Esto se traduce en que la puerta quedará abierta si al menos un α_i es impar.

Recíprocamente, la puerta m quedará cerrada si

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} \quad \text{con } \alpha_i \text{ par } \forall i.$$

O lo que es lo mismo, si $\tau(n) = 2 \cdot k - 1$, con k un entero positivo.

Concretamente, la puerta número 1 quedará cerrada, pues 1 tiene un único divisor. El conjunto de puertas que quedarán cerradas es $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$.

Problema escrito por Jesús de los Nietos Valle.