1.4.9. *Demostrar que en cualquier conjunto ordenado de n+1 enteros positivos menores o iguales que 2n siempre hay uno que divide al otro.*

Solución: Sea N el conjunto de los enteros positivos menores o iguales que 2n.

$$N = \{1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 2n-1,\ 2n\}$$

Por la alternancia de los números pares e impares en los naturales, sabemos que el conjunto N incluye exactamente n números pares y n números impares.

Sea $\alpha,\ \beta\ \in\ \mathbb{N}$, podemos hacer variar β en el dominio de los números impares del conjunto N para generar, mediante la expresión $2^\alpha\beta$, todos los enteros del conjunto.

De esta forma, hacemos una partición del conjunto N en n cajas diferentes, sabiendo que si dos elementos están en la misma caja, entonces uno de ellos divide al otro (resultando, como cociente, una potencia de 2).

Caja 1	Caja 2	Caja 3	...	Caja n
2^α	$2^\alpha * 3$	$2^\alpha * 5$	...	$2^\alpha * (n-1)$

En efecto, es fácil comprobar que cualquier número del conjunto N es de la forma $2^\alpha\beta$, con β un número impar, luego pertenece a alguna de las n cajas previamente descritas. A modo de observación, basta considerar $\alpha = 0$ para generar los impares, y $\beta = 1$ para conseguir las potencias de 2. Siendo así, como queremos un conjunto de n+1 elementos, necesariamente habrá al menos dos números en alguna de las cajas (*Principio del Palomar - Dirichlet, 1834*).

Y por tanto, al haber al menos dos números del conjunto N en alguna de las cajas, existe, cuanto menos, un número que divide a otro para cualquier conjunto ordenado de n+1 enteros positivos menores o iguales que 2n.

Problema escrito por Jesús de los Nietos Valle.