1.4.8. *He comprado bolígrafos a 101 pesetas y rotuladores a 140 pesetas. Si me he gastado en total 2993 pesetas, ¿cuántos he comprado de cada?*

Solución: Sea m el número de bolígrafos que he adquirido, y n el número de rotuladores, entonces:

$$101m + 140n = 2993 \qquad \textit{tal que } m,\ n \in \mathbb{N}$$

Vamos a utilizar el algoritmo de Euclides:

$140 = 101 * 1 + 39$
$101 = 39 * 2 + 23$
$39 = 23 * 1 + 16$
$23 = 16 * 1 + 7$
$16 = 7 * 2 + 2$
$7 = 2 * 3 + 1$ $\qquad \leftarrow$ Último resto no nulo $\Rightarrow (101, 140) = 1$
$2 = 1 * 2 + 0$

Por tanto, (101, 140) = 1, lo cual era evidente, ya que 101 es un número primo. Además, como $1 \mid 2993$, la ecuación diofántica lineal (o identidad de Bézout) tendrá solución para $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$.

Vamos a hallar una solución particular, mediante un proceso "backwards" del algoritmo de Euclides y la identidad de Bézout:

$1 = 7 - 2 * 3$
$1 = 7 - 3 * (16 - 7 * 2)$
$1 = 7 * 7 - 3 * 16$
$1 = -3 * 16 + 7 * (23 - 16 * 1)$
$1 = -10 * 16 + 7 * 23$
$1 = -10 * (39 - 23 * 1) + 7 * 23$
$1 = 17 * 23 - 10 * 39$
$1 = 17 * (101 - 39 * 2) - 2 * 39$
$1 = -44 * 39 + 17 * 101$
$1 = -44 * (140 - 101 * 1) + 17 * 101$
$1 = -44 * 140 + 61 * 101$

Y, finalmente, multiplicamos por 2993 a ambos lados de la ecuación:

$$2993 = -131692 * 140 + 182573 * 101$$

Por consiguiente, ya tenemos una solución particular:

$$(m, n) = (182573, -131692)$$

Ahora hallamos la solución del sistema homogéneo asociado a la ecuación:

$$101m + 140n = 0$$

Estudiemos la ecuación como si estuviera definida en $\mathbb{R}^2$. Entonces, estaríamos ante una recta cuyo vector normal sería proporcional a (101, 140). Siendo así, podemos tomar (-140, 101) como vector director. Con todo esto, la ecuación diofántica $101m + 140n = 2993$ tiene como conjunto de soluciones:

$$(m, n) = (182573, -131692) + (-140, 101) * k \qquad tal\ que\ k \in \mathbb{Z}$$

Limitamos el dominio del conjunto de soluciones a $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ y buscamos la mínima tupla de números naturales m, n que satisfaga la solución. Basta observar que $\lfloor 182573 : (-140) \rfloor = 1304$. Siendo así, podemos establecer una cota para el valor que k que nos interesa: $1303 < k < 1305$.

En efecto, sea k=1304, tenemos (m, n) = (13, 12). Esto es, la solución al problema es que he comprado 13 bolígrafos y 12 rotuladores.

Vemos que, efectivamente, el problema tiene solución única.

Supongamos $k = 1303 \Rightarrow (m, n) = (153, -89) \notin \mathbb{N}^2$
De igual forma, si $k = 1305 \Rightarrow (m, n) = (-128, 113) \notin \mathbb{N}^2$

Problema escrito por Jesús de los Nietos Valle.