

1.4.4. *Encontrar todas las ternas de enteros positivos a, b, c tales que $(a, b, c) = 10$ y $[a, b, c] = 100$.*

Solución: Los tres enteros a, b y c son múltiplos de 10 y divisores de 100. Por lo tanto:

$$a, b, c \in \{10, 20, 50, 100\}$$

Con esto, tenemos $10 \leq (a, b, c) \leq [a, b, c] \leq 100$. Supongamos que $a \leq b \leq c$, para buscar solo las ternas ordenadas de menor a mayor. De esto se puede concluir que $a \leq 20$, ya que en otro caso los tres números serían múltiplos de 50, y $c \geq 50$, ya que en otro caso los tres números serían divisores de 20.

Podemos distinguir 4 posibilidades, en función de los valores de a y c :

- Si $a = 10$ y $c = 100$, ya se cumplen las dos condiciones. Por lo tanto b puede valer 10, 20, 50 ó 100.
- Si $a = 10$ y $c = 50$, entonces $b = 20$, que es el único que cumple $[a, b, c] = 100$.
- Si $a = 20$ y $c = 100$, entonces $b = 50$, que es el único que cumple $(a, b, c) = 10$.
- Si $a = 20$ y $c = 50$, se cumplen las dos condiciones y b puede valer 20 ó 50.

Por lo tanto, las ternas ordenadas encontradas son:

$$(10, 10, 100), (10, 20, 100), (10, 50, 100), (10, 100, 100), \\ (10, 20, 50), (20, 50, 100), (20, 20, 50), (20, 50, 50)$$

Las ternas pedidas son las 8 anteriores junto con todas sus permutaciones posibles. Hay un total de 36 ternas.

Problema escrito por Rubén García-Valcárcel Sen