1.4.37. *Sabiendo que para* $(a,q)=1$ *se tiene que*

$$\Theta(x;a,q)=\sum_{\substack{p\le x\\ p\equiv a \mod q}}\log p\sim\frac{x}{\phi(q)},$$

hallar una estimación asintótica para:

$$\log m.c.m.(a+q,...,a+nq).$$

Solución: Pongamos que $a<q$, que luego veremos que no es restrictivo (tomando el resto de dividir entre q) y p siempre un número primo. Tomamos

$$m.c.m.(a+q,\ a+2q,\dots,a+nq)=\prod_p p^{\alpha_p}.$$

Está claro que esta cantidad está bien definida. Es sencillamente la factorización en primos de dicha cantidad. Los exponentes α_p cumplen trivialmente que $\alpha_p\le\lfloor\frac{\log(a+nq)}{\log p}\rfloor$. En particular si $p>\sqrt{a+nq}$ entonces $\alpha_p\le 1$.

Si llamamos P al conjunto de primos que aparecen en la factorización podemos escribir

$$\begin{aligned}\log m.c.m.(a+q,\ a+2q,\dots,a+nq) &= \sum_{p\in P}\log p+\sum_{\substack{p\le\sqrt{a+nq}\\ p\in P}}(\alpha_p-1)\log p\\ &= \sum_{p\in P}\log p+O(\sqrt{n}).\end{aligned}$$

El término de error procede de la desigualdad

$$\sum_{\substack{p\le\sqrt{a+nq}\\ p\in P}}(\alpha_p-1)\log p\le\sum_{\substack{p\le\sqrt{a+nq}\\ p\in P}}\left\lfloor\frac{\log(a+nq)}{\log p}\right\rfloor\log p\le\sum_{p\le\sqrt{a+nq}}\log(a+nq)=O(\sqrt{n}).$$

Observemos que $p\in P$ si y sólo si p o un múltiplo de p cae en la progresión aritmética $a+q,\dots,a+nq$. Dicho de otra manera, $p\in P$ si y sólo $mp\le a+nq$, donde mp es el primer múltiplo de p tal que $mp\equiv a \pmod q$.

Es decir

$$\begin{aligned}
\sum_{p\in P}\log p &= \sum_{\substack{1\le m\le q\\(m,q)=1}}\ \sum_{\substack{p\in P\\ mp\equiv a \pmod q}} \log p\\
&= \sum_{\substack{1\le m\le q\\(m,q)=1}}\ \sum_{\substack{p\le (a+nq)/m\\ p\equiv m^{-1}a \pmod q}} \log p\\
&= \sum_{\substack{1\le m\le q\\(m,q)=1}} \Theta((a+nq)/m; m^{-1}a, q)\\
&\sim \sum_{\substack{1\le m\le q\\(m,q)=1}} \frac{a+nq}{m\phi(q)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\log m.c.m.(a+q,\ a+2q,\dots,a+nq) \sim \frac{nq}{\phi(q)} \sum_{\substack{1\le m\le q\\(m,q)=1}} \frac{1}{m}.$$

Problema escrito por Diego González.