1.4.36. *Demostrar que*

$$m.c.m(1, 2, \ldots, n) = e^{\Psi(n)}.$$

Deducir que la expresión

$$e^{\Psi(2N+1)} \int_0^1 x^N (1-x)^N dx$$

representa un entero positivo y usar esto para demostrar que $\Psi(2N+1) \geq N \log 4$.

Solución:

En el sumatorio de $\Psi(n)$, cada $\log p$ aparece tantas veces como potencias de p haya menores o iguales que n. El máximo exponente m de p tal que $p^m \leq n$ es $m = \left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor$. Así que

$$\Psi(n) = \sum_{p \leq n} \log p \left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor$$

y por tanto

$$e^{\Psi(n)} = \prod_{p \leq n} p^{\left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor}.$$

Por otra parte en el desarrollo en producto de potencias de primos del $m.c.m(1, \ldots, n)$ el primo p aparece elevado a la máxima potencia de p menor o igual que n. Esa potencia es precisamente $p^{\left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor}$. Es decir,

$$m.c.m.(1, \ldots, n) = \prod_{p \leq n} p^{\left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor}.$$

Ahora, para demostrar que $e^{\Psi(2N+1)} \int_0^1 x^N (1-x)^N dx$ es un entero positivo notamos que

$$\begin{aligned}
e^{\Psi(2N+1)} \int_0^1 x^N (1-x)^N dx &= m.c.m(1, \ldots, 2N+1) \int_0^1 \left(x^N \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} (-1)^{N-i} x^{N-i} \right) dx \\
&= m.c.m(1, \ldots, 2N+1) \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} (-1)^{N-i} \int_0^1 x^{2N-i} dx \\
&= m.c.m(1, \ldots, 2N+1) \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} (-1)^{N-i} \frac{1}{2N-i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} (-1)^{N-i} \frac{m.c.m(1, \ldots, 2N+1)}{2N+1-i},
\end{aligned}$$

de donde $e^{\Psi(2N+1)}\int_0^1 x^N(1-x)^N dx \in \mathbb{Z}^+$ por ser positivo y tenerse $2N+1-i \in \{1,\ldots,2N+1\}$ para $i=0,\ldots,N$.

Finalmente, la función $x^N(1-x)^N$ alcanza su máximo en $x=1/2$, así que $\int_0^1 x^N(1-x)^N dx \le (1/2)^{2N} = 1/4^N$ y entonces

$$\begin{aligned} 0 &\le \log\left(e^{\Psi(2N+1)}\int_0^1 x^N(1-x)^N dx\right) \\ &\le \log\left(e^{\Psi(2N+1)}(1/4)^N\right) \\ &= \Psi(2N+1) - N\log 4. \end{aligned}$$

Problema escrito por Jonatan Barreiro