1.4.34. *Demostrar que $p_n \sim n\log(n)$ es equivalente al Teorema de los Números Primos.*

Solución: p_n representa el n-ésimo número primo. Para probar esta equivalencia empecemos partiendo del teorema de los números primos.

Es trivial que $\pi(p_n) = n$ para cualquier n. Como $\pi(p_n) = n \sim p_n/\log(p_n)$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\log(p_n)}{p_n} = 1.$$

Tomando logaritmos tenemos que $\log(n) - \log(p_n) + \log\log(p_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Dividiendo esta expresión entre $\log(p_n)$ está claro que deducimos que $\log(n) \sim \log(p_n)$ (ya que $\log\log(p_n) = o(\log(p_n))$).

Y con esto, partiendo de $\frac{\pi(x)}{x/\log(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$ y tomando $x = p_n$:

$$1 = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi(p_n)}{p_n/\log(p_n)} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{p_n/\log(n)}}_{\pi(p_n)=n \text{ y } \log(n)\sim\log(p_n)}.$$

Lo que prueba que $p_n \sim n\log(n)$.

Para el recíproco, dado $x \geq 2$ está claro que $p_{\pi(x)} \leq x < p_{\pi(x)+1}$.

Como ahora hemos supesto que $p_n \sim n\log(n)$ tomando $n = \pi(x)$ deducimos que $p_{\pi(x)} \sim \pi(x)\log(\pi(x))$ (basta notar que $\pi(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$). Ahora podemos deducir que como

$$1 \leq \frac{x}{p_{\pi(x)}} < \frac{p_{\pi(x)+1}}{p_{\pi(x)}},$$

al tomar el límite cuando $x \to \infty$ nos queda

$$1 \leq \lim_{x\to\infty} \frac{x}{p_{\pi(x)}} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{p_{\pi(x)+1}}{p_{\pi(x)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\pi(x)+1)}{\pi(x)} \frac{\log(\pi(x)+1)}{\log(\pi(x))} = 1.$$

Así que $p_{\pi(x)} \sim x$. Ahora partiendo de $\lim_{n\to\infty} p_n/(n\log n) = 1$ si tomamos logaritmos se deduce (igual que antes prácticamente, dividiendo entre $\log(n)$ y notando que $\log\log n = o(\log(n))$) que $\log(p_n) \sim \log(n)$. Y de modo equivalente (tomando logaritmos):

$$1 \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\log(p_{\pi(x)})} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\log p_{\pi(x)+1}}{\log p_{\pi(x)}} \leq \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{\log(\pi(x)+1)}{\log \pi(x)}}_{\log(p_n)\sim\log(n)} = 1.$$

Y esto prueba que $\log x \sim \log \pi(x)$. Ahora solo resta calcular el siguiente límite con $n = \pi(x)$:

$$1 = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{p_n}{n\log(n)}}_{\text{tomamos } n=\pi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{p_{\pi(x)}}{\pi(x)\log(\pi(x))} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\pi(x)\log(x)}}_{\log(\pi(x))\sim\log(x) \text{ y } p_{\pi(x)}\sim x}.$$

Problema escrito por Diego González.