1.4.33. *Demostrar que*

$$\log 2 \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} \leq 2\log 2$$

Solución: Es obvio, por definición, que

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)}$$

Entonces, basta demostrar la cota inferior y la cota superior.

Cota superior: Aplicaremos el siguiente lema:
Lema: Para todo $n \leq 2$,

$$\prod_{p\leq n} p < 4^n$$

Tomamos $0 < \alpha < 1$. Entonces, tomando todos los primos entre n^α y n, obtenemos que:

$$(n^\alpha)^{\pi(n)-\pi(n^\alpha)} \leq \prod_{n^\alpha \leq p \leq n} p \leq 4^n$$

Tomamos logaritmos, y obtenemos que:

$$\alpha \log(n)(\pi(n) - \pi(n^\alpha)) \leq n \log 4 = 2n \log 2$$

Despejamos $\pi(n)$, y, teniendo en cuenta que $\pi(n^\alpha) < n^\alpha$ obtenemos que:

$$\pi(n) \leq \frac{2n\log 2}{\alpha \log n} + \pi(n^\alpha) =$$

$$= \frac{n}{\log n}\left(\frac{2\log 2}{\alpha} + n^{\alpha-1}\log n\right)$$

Tomando x real:

$$\pi(x) = \pi(\lfloor x \rfloor) \leq \frac{\lfloor x \rfloor}{\log \lfloor x \rfloor}\left(\frac{2\log 2}{\alpha} + \lfloor x \rfloor^{\alpha-1}\log \lfloor x \rfloor\right)$$

$$\leq \frac{x}{\log x}\left(\frac{2\log 2}{\alpha} + x^{\alpha-1}\log x\right)$$

Como $\alpha < 1$, entonces, tenemos que, al tomar límites superiores:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} \leq \frac{2\log 2}{\alpha}$$

Como esto se cumple para cualquier α menor que 1, tomando límites, obtenemos que

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} \leq 2\log 2$$

Cota inferior: Aplicaremos el siguiente lema:
LEMA: El exponente del primo p en la factorización de $n!$ es:

$$\sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

COROLARIO: El exponente de p en $\binom{2n}{n}$ es:

$$s_p = \sum_{k\geq 1}\left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor\right) \leq \left\lfloor \frac{\log(2n)}{\log p}\right\rfloor$$

Tenemos que:

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + ... + \binom{2n}{n} + ... + \binom{2n}{2n} \leq$$

$$\leq \binom{2n}{n}(2n+1)$$

A su vez, se cumple lo siguiente (aplicando el corolario anterior):

$$\frac{2^{2n}}{2n+1} \leq \binom{2n}{n} = \prod_{p\leq 2n} p^{s_p} \leq \prod p^{\frac{\log 2n}{\log p}}$$

Tomamos logaritmos a ambos lados:

$$2n\cdot\log(2) - \log(2n+1) \leq \sum_{p\leq 2n} \frac{\log 2n}{\log p}\log p = \log(2n)\pi(2n)$$

$$\pi(2n) \geq \frac{2n \log 2 - \log(2n+1)}{\log 2n}$$

Entonces, deducimos lo siguiente para x número real grande:

$$\pi(x) \geq \pi(2\lfloor x/2 \rfloor) \geq \frac{2\lfloor x/2 \rfloor \log 2 - \log(2\lfloor x/2 \rfloor + 1)}{\log 2\lfloor x/2 \rfloor}$$

$$\geq \frac{(x-2)\log 2 - \log(x+1)}{\log x}$$

$$= \frac{x}{\log x}\left(\log 2 - \frac{2\log 2 + \log(x+1)}{x}\right)$$

Y, finalmente

$$\frac{\pi(x)}{x/\log x} \geq \left(\log 2 - \frac{2\log 2 + \log(x+1)}{x}\right)$$

Tomamos el límite inferior a ambos lados, y tenemos que:

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} \geq \log 2$$

Problema escrito por Javier Sanz-Cruzado Puig