1.4.31. *Demostrar que para todo $x \geq 3$ se tiene que*

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{p} \geq \log \log x - 1.$$

Solución:

Vamos a partir de la representación de la función ζ como producto infinito (para todo la prueba, p siempre representa un número primo):

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Esta expresión es válida cuando $Re(s) > 1$. Si en vez de tomar todos los primos tomamos sólo los menores o iguales a x tenemos que:

$$\sum_{n \in S_x} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Donde S_x representa el conjunto de todos los enteros tal que en su factorización sólo aparecen primos menores o iguales a x. Está claro que contiene todos los números menores o iguales a x. Como el mienbro de la derecha es un producto finito, podemos tomar $s = 1$ sin mayor problema. Lo que vamos a hacer es tomar logaritmos, nos va a interesar el desarrollo en serie de potencias del logaritmo. La función $g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j}$ define una función holomorfa para $|z| < 1$. Si la derivamos está claro que $g'(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1-z}$ con lo que $e^{g(z)} = \frac{1}{1-z}$. Tomando la rama principal del logaritmo (que coincide con el logaritmo usual en los reales) tenemos que $g(z) = \text{Log}(\frac{1}{1-z})$. Como $p \geq 2$, si $z = 1/p$ podemos aplicar esta fórmula sin mayor cuidado. Tomando logaritmos en la expresión de arriba nos queda:

$$\log \left(\sum_{n \in S_x} \frac{1}{n} \right) = -\sum_{p \leq x} \log \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \sum_{p \leq x} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{jp^j}.$$

A nosotros nos interesa el primer término de esos sumatorios:

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \left(\sum_{n \in S_x} \frac{1}{n} \right) - \sum_{p \leq x} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{jp^j}.$$

Ahora ya sólo queda acotar esos términos. Para empezar, sabemos que $\sum_{n\in S_x}\frac{1}{n} \geq \sum_{n\leq x}\frac{1}{n} \geq \log(x)$. Para la última desigualdad, podemos hacerlo de varias maneras, la más fácil es comparando la suma con la integral (dibujando $1/x$ y comparando la integral con la suma de rectángulos de base 1). Con esto ya tenemos que $\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} \geq \log\log x - \sum_{p\leq x}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{jp^j}$ (tomamos $x \geq 3$ para asegurarnos de que $\log x \geq 0$). Sólo nos queda ver que ese término de error es controlable por 1.

Para hallar una cota válida podemos hacer lo siguiente:

$$\sum_{p\leq x}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{jp^j} \leq \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{jn^j} \leq \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{n^j} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1/n^2}{1-1/n}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n} \leq \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\underbrace{\frac{2}{n^2}}_{n^2-n\geq n^2/2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 < 1.$$

La última igualdad sale del valor de $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ que se puede calcular usando la factorización del seno como producto infinito o mediante Parseval. Y esto ya concluye que para $x \geq 3$:

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{p} \geq \log\log x - 1.$$

Problema escrito por Diego González.