1.4.3. *Determinar una condición necesaria y suficiente para que la suma de los n primeros números naturales divida a su producto.*

Solución: Sean $S_n = \sum_{i=1}^{n} i$ y $P_n = \prod_{i=1}^{n} i$. Vamos a demostrar que $S_n \mid P_n \iff n = 1$ o $n+1$ no es primo.

Observamos que $S_n = \frac{(n+1)n}{2}$. Es claro que si $n+1$ es un primo impar entonces S_n no divide a P_n porque el primo $n+1$ no es factor primo de P_n. Nos queda por ver que si $n = 1$ o $n+1$ no es un primo entonces $S_n \mid P_n$. Vamos a dividir el estudio en casos:

1. Es claro que para $n = 1$ se tiene que $S_1 \mid P_1$.
2. n impar y $n \geq 3$:

   Entonces $S_n \mid P_n \iff \frac{n+1}{2}$ divide a $P_n/n = 1 \cdot 2 \cdots (n-1)$. Pero esto es cierto porque $\frac{n+1}{2} \leq n-1$ (ya que $n \geq 1$).
3. n par y $n \geq 2$:

   Tenemos que ver que $n+1$ divide a
   $$P_n/(\frac{n}{2}) = 1 \cdots (\frac{n}{2} - 1) \cdot (\frac{n}{2} - 1) \cdots n.$$

   a) Caso: $n+1 = d_1 d_2$ con $3 \leq d_1 < d_2 \leq \frac{n+1}{3}$.
   Para $n = 2, 4, 6$ se puede comprobar directamente. Si $n \geq 8$ entonces $\frac{n+1}{3} \leq \frac{n}{2} - 1$ y en este caso tenemos que
   $$P_n/(\frac{n}{2}) = 1 \cdot 2 \cdots d_1 \cdots d_2 \cdots (\frac{n}{2} - 1) \cdot (\frac{n}{2} - 1) \cdots n$$
   y claramente $n+1$ divide a $P_n/(\frac{n}{2})$.
   b) Caso: $n+1 = p^2$ con p primo impar (es el único caso no cubierto por el caso a)). Para $p = 3$ es claro que $n+1$ divide a $P_n/(\frac{n}{2})$ para $n = 8$. Si $p \geq 5$ entonces $n \geq 24$ y $2p = 2\sqrt{n+1} \leq \frac{n}{2} - 1$. Siendo así tenemos que
   $$P_n/(\frac{n}{2}) = 1 \cdots p \cdots 2p \cdots (\frac{n}{2} - 1)(\frac{n}{2} + 1) \cdots n$$
   y por tanto $n+1$ divide a $P_n/(\frac{n}{2})$.

Problema escrito por Óscar Losada Suárez