1.4.29. *Un cuadrado de $n \times n$ números enteros se dice que es mágico si la suma de los números de cada una de sus filas o columnas, así como de cada una de las dos diagonales principales, es el mismo. Encontrar un cuadrado mágico 3×3 formado todo por números primos.*

Solución: Tenemos que encontrar un cuadrado mágico 3×3 formado todo por números primos. Dado que buscamos un cuadrado mágico 3×3, es fácil encontrar un cuadrado mágico a partir de una progresión aritmética de 9 números.

Veamos por qué:

En primer lugar, probaremos un par de propiedades de los cuadrados mágicos:

PROPIEDAD 1: Tenemos un cuadrado mágico $n \times n$ de números enteros. Entonces, si sumamos (o restamos) una constante (entera) a todos los números del cuadrado mágico, obtenemos de nuevo un cuadrado mágico de números enteros.

Demostración: Sea

b_{11}	b_{12}	...	b_{1n}
b_{21}	b_{22}	...	b_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
b_{n1}	b_{n2}	...	b_{nn}

un cuadrado mágico. La suma de sus filas, columnas y diagonales vale C.

Entonces, sumamos una constante l (entera) a todos sus términos:

$b_{11}+l$	$b_{12}+l$	...	$b_{1n}+l$
$b_{21}+l$	$b_{22}+l$	...	$b_{2n}+l$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$b_{n1}+l$	$b_{n2}+l$	...	$b_{nn}+l$

Queremos ver que este nuevo cuadrado sigue siendo un cuadrado mágico.

<u>Suma de la fila k-ésima (k entero entre 1 y n):</u>

$b_{11}+l$	$b_{12}+l$	...	$b_{1n}+l$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$b_{k1}+l$	$b_{k2}+l$	...	$b_{kn}+l$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$b_{n1}+l$	$b_{(n2}+l$	...	$b_{nn}+l$

$$(b_{k1}+l)+(b_{k2}+l)+...+(b_{kn}+l)=$$
$$=(b_{k1}+b_{k2}+...+b_{kn})+nl=C+nl$$

Esto es independiente de k, luego no depende de la fila. Entonces, todas las filas suman lo mismo.

Suma de la columna k-ésima(k entero entre 1 y n):

$b_{11}+l$	...	$b_{1k}+l$	...	$b_{1n}+l$
$b_{21}+l$	...	$b_{2k}+l$	...	$b_{2n}+l$
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$b_{n1}+l$	...	$b_{nk}+l$	...	$b_{nn}+l$

$$(b_{1k}+l)+(b_{2k}+l)+...(b_{nk}+l)=$$
$$=(b_{1k}+b_{2k}+...+b_{nk})+nl=C+nl$$

Como este resultado es independiente de k, no depende de la columna, por lo que todas las columnas suman lo mismo.

Suma de la diagonal principal:

$b_{11}+l$				
	$b_{22}+l$			
		$b_{33}+l$		
			$\ddots$	
				$b_{nn}+l$

$$(b_{11}+l)+(b_{22}+l)+(b_{33}+l)+...+(b_{(n-1)(n-1)}+l)+(b_{nn}+l)=$$
$$=(b_{11}+b_{22}+b_{33}+...+b_{(n-1)(n-1)}+b_{nn})+nl=C+nl$$

Suma de la diagonal restante:

				$b_1n + l$
			$b_{2(n-1)} + l$	
		$b_{3(n-2)} + l$		
	...			
b_{n1}				

$$(b_{1n} + l) + (b_{2(n-1)} + l) + (b_{3(n-2)} + l) + ... + (b_{n1} + l) =$$
$$= (b_{1n} + b_{2(n-1)} + b_{3(n-2)} + ... + b_{n1}) + nl = C + nl$$

Como las filas, columnas y diagonales suman lo mismo, entonces, tenemos que se trata de un cuadrado mágico.

PROPIEDAD 2: Si multiplicamos todos los números de un cuadrado mágico $n \times n$ por una constante entera, el cuadrado restante seguirá siendo mágico.

Demostración: Sea

b_{11}	b_{12}	...	b_{1n}
b_{21}	b_{22}	...	b_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
b_{n1}	b_{n2}	...	b_{nn}

un cuadrado mágico, cuyas filas, columnas y diagonales suman C.

Entonces, multiplicamos todos los números por una constante entera l, y obtenemos el siguiente cuadrado de enteros:

$l \cdot b_{11}$	$l \cdot b_{12}$	...	$l \cdot b_{1n}$
$l \cdot b_{21}$	$l \cdot b_{22}$	...	$l \cdot b_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$l \cdot b_{n1}$	$l \cdot b_{n2}$	...	$l \cdot b_{nn}$

Queremos ver que este cuadrado sigue siendo de nuevo un cuadrado mágico:

Suma de la fila k-ésima (k entero entre 1 y n):

$$(l \cdot b_{k1}) + (l \cdot b_{k2}) + ... + (l \cdot b_{kn}) =$$
$$= l \cdot (b_{k1} + b_{k2} + ... + b_{kn}) = l \cdot C$$

Esto es independiente de k, luego no depende de la fila. Entonces, todas las filas suman lo mismo.

Suma de la columna k-ésima(k entero entre 1 y n):

$$(l \cdot b_{1k}) + (l \cdot b_{2k}) + ...(l \cdot b_{nk}) =$$
$$= l \cdot (b_{1k} + b_{2k} + ... + b_{nk}) = l \cdot C$$

Como este resultado es independiente de k, no depende de la columna, por lo que todas las columnas suman lo mismo.

Suma de la diagonal principal:

$$(l \cdot b_{11}) + (l \cdot b_{22}) + (l \cdot b_{33}) + ... + (l \cdot b_{(n-1)(n-1)}) + (l \cdot b_{nn}) =$$
$$= l \cdot (b_{11} + b_{22} + b_{33} + ...b_{(n-1)(n-1)} + b_{nn}) = l \cdot C$$

Suma de la diagonal restante:

$$(l \cdot b_{1n}) + (l \cdot b_{2(n-1)}) + (l \cdot b_{3(n-2)}) + ... + (l \cdot b_{n1}) =$$
$$= l \cdot (b_{1n} + b_{2(n-1)} + b_{3(n-2)} + ... + b_{n1}) = l \cdot C$$

Como las filas, columnas y diagonales suman lo mismo, entonces, tenemos que se trata de un cuadrado mágico.

De las dos propiedades anteriores, se deduce que si n^2 enteros

$$b_1, b_2, ..., b_{n^2}$$

pueden formar un cuadrado mágico, entonces, los números

$$k \cdot b_1 + l, k \cdot b_2 + l, ..., k \cdot b_{n^2} + l$$

con k, l enteros, también.

Entonces, sea $(a_i)_{i=1}^{i=9}$ una progresión aritmética de razón k con 9 números enteros. Entonces, los términos de la misma son:

$$a_1, a_2 = a_1 + k, a_3 = a_1 + 2k, ..., a_9 = a_1 + 8k$$

Queremos ver que estos números pueden formar un cuadrado mágico.

Para ello, partimos de los números de 0 a 8.

Tenemos que, un ejemplo de cuadrado mágico 3×3 formado por los números de 0 a 8 sería:

3	8	1
2	4	6
7	0	5

(Se puede comprobar fácilmente que la suma de cada una de las filas, columnas y diagonales es 12)

De aquí, obtenemos, por la propiedad 2, multiplicando todos los números por k, que

$3k$	$8k$	$1k$
$2k$	$4k$	$6k$
$7k$	0	$5k$

es un cuadrado mágico, y de aquí, por la propiedad 1, sumando a_1 a todos los números del cuadrado, que

$a_1 + 3k$	$a_1 + 8k$	$a_1 + 1k$
$a_1 + 2k$	$a_1 + 4k$	$a_1 + 6k$
$a_1 + 7k$	a_1	$a_1 + 5k$

es un cuadrado mágico. Este cuadrado es el mismo que el siguiente:

a_4	a_9	a_2
a_3	a_5	a_7
a_8	a_1	a_6

Es decir, un cuadrado mágico formado por los números de la progresión aritmética.

<u>Conclusión:</u> Con cualquier progresión aritmética de 9 términos enteros se puede formar un cuadrado mágico 3×3.

En particular, si tenemos una progresión aritmética formada por 9 números primos, podemos encontrar un cuadrado mágico 3×3 formado únicamente por primos.

Por el teorema 1.3.1., sabemos que, para todo $k \geq 3$ existen k primos en progresión aritmética. En particular, existe una progresión aritmética con 9 primos.

Buscando con primos $p \geq 11$, encontramos la siguiente progresión para $p = 17$:

$$17, 6947, 13877, 20807, 27737, 34667, 41597, 48527, 55457$$

con razón 6930.

A partir de ella, construimos el cuadrado mágico empleando el procedimiento para demostrar que a partir de cualquier progresión aritmética de 9 números se puede un cuadrado mágico 3×3:

Partimos del cuadrado mágico siguiente:

3	8	1
2	4	6
7	0	5

Multiplicamos todos los números de la tabla por 6930:

20790	55440	6930
13860	27720	41580
48510	0	34650

Y, por último, sumamos 17 a todos los números:

20807	55457	6947
13877	27737	41597
48527	17	34667

Este cuadrado es el cuadrado mágico que buscábamos. Lo comprobamos:

$$20807 + 55457 + 6947 = 83211$$

$$13877 + 27737 + 41597 = 83211$$

$$48527 + 17 + 34667 = 83211$$

$$20807 + 13877 + 48527 = 83211$$

$$55457 + 27737 + 17 = 83211$$

$$6947 + 41597 + 34667 = 83211$$
$$20807 + 27737 + 34667 = 83211$$
$$48527 + 27737 + 6947 = 83211$$

Problema escrito por Javier Sanz-Cruzado Puig