

1.4.28. Hallar todos los primos p tales que p , $p+4$, $p+6$, $p+10$, $p+12$, $p+16$ y $p+22$ sean primos.

Solución: Para poder resolver este problema, vamos a buscar un módulo en el cual siempre encontremos un cero en alguno de los primos buscados. Es decir, si para algún p tenemos que uno de nuestros primos es $0 \pmod{p}$ para todos los residuos posibles, entonces veremos que no existe esta secuencia salvo en un caso. Veámoslo para módulo 7:

p	\equiv	0	1	2	3	4	5	6
$p+4$	\equiv	4	5	6	0	1	2	3
$p+6$	\equiv	6	0	1	2	3	4	5
$p+10$	\equiv	3	4	5	6	0	1	2
$p+12$	\equiv	5	6	0	1	2	3	4
$p+16$	\equiv	2	3	4	5	6	0	1
$p+22$	\equiv	1	2	3	4	5	6	0

En módulo 7 observamos que hay un cero para alguno de los primos, empecemos por el residuo que empecemos. Pero, ¡cuidado!, aún podría ser que el primo que es $0 \pmod{7}$ fuera el propio 7, con lo que la secuencia valdría. Y así ocurre si empezamos con $p = 7$:

p	$=$	7
$p+4$	$=$	11
$p+6$	$=$	13
$p+10$	$=$	17
$p+12$	$=$	19
$p+16$	$=$	23
$p+22$	$=$	29

Y esta es, por tanto, la única secuencia que podemos encontrar

Problema escrito por Julio Aroca