1.4.27. *¿En cuántos ceros acaba 371!?*

Solución: Sea $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema Fundamental de la Aritmética (TFA) podemos expresarlo como un producto de números primos de manera única, salvo por el orden de los factores. En concreto:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_n^{\alpha_n} \qquad \textit{con } p_i \textit{ primos distintos y } 0 < i < n+1$$

Supongamos $p_1 = 2$ y $p_2 = 5$, entonces el número de cifras finales iguales a 0 del número n es igual al mínimo entre α_1 y α_2 . Esto es, puesto que 10=2*5, podemos expresar n de la siguiente manera:

$$n = 10^{\beta}\ p_1^{\alpha_1 - \beta} p_2^{\alpha_2 - \beta} p_3^{\alpha_3} \dots p_n^{\alpha_n} \qquad \textit{con } \beta = min(\alpha_1,\ \alpha_2)$$

En el caso práctico $n = 371!$ tenemos:

$$371! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_n^{\alpha_n}$$

El problema se reduce, por tanto, a calcular α_1 y α_2. Por el **Lema de Legendre**, el exponente del primo p en la factorización de n! es $\sum\limits_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$

- Cálculo de α_1:

$\alpha_1 = \sum\limits_{k \geq 1} + \left\lfloor \frac{371}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{371}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{371}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{371}{2^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{371}{2^5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{371}{2^6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{371}{2^7} + \left\lfloor \frac{371}{2^8} \right\rfloor \right\rfloor +$
$\left\lfloor \frac{371}{2^9} \right\rfloor + \cdots = 185 + 92 + 46 + 23 + 11 + 5 + 2 + 1 + 0 + \cdots = 365$

- Cálculo de α_2:

$\alpha_2 = \sum\limits_{k \geq 1} + \left\lfloor \frac{371}{5^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{371}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{371}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{371}{5^4} \right\rfloor + \cdots = 74 + 14 + 2 + 0 + \cdots = 90$

El número de ceros de 371! es min(365, 90) = 90.
Esto es, podemos expresar 371! de la siguiente forma:

$$371! = 10^{90} * 2^{275} * p_3^{\alpha_3} * \cdots * p_n^{\alpha_n}$$

con p_i primos distintos mayores que 5 y tal que $2 < i < n+1$

Problema escrito por Jesús de los Nietos Valle.