1.4.22. *Sea* $\alpha = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{p_n}{10^{n^2}}$*, donde* p_n *es el primo enésimo. Demostrar que* α *tiene la propiedad de que*

$$p_m = \underbrace{[10^{m^2}\alpha]}_{(1)} - \underbrace{10^{2m-1}[10^{(m-1)^2}\alpha]}_{(2)}$$

para todo m*.*

- Comenzamos resolviendo (1):
  $[10^{m^2}\alpha] = [10^{m^2} \sum\limits_{n\geq 1} \frac{p_n}{10^{n^2}}] = [\sum\limits_{n=1}^{\infty} 10^{m^2-n^2} p_n] = \sum\limits_{n=1}^{m} 10^{m^2-n^2} p_n + [\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} 10^{m^2-n^2} p_n]$

  Ahora vamos a acotar la siguiente suma infinita. El objetivo será probar que es menor que 1 y que, por tanto, la parte entera de la misma es 0. Para este cálculo utilizaremos el Lema 1.2.4. En concreto:

  $$\prod_{p\leq n} p < 4^n \implies p_n < 4^n \implies p_n < 10^n.$$

  Utilizamos esta cota para probar que la suma infinita es menor que 1:
  $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} 10^{m^2-n^2} p_n = \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} \frac{p_n}{10^{n^2-m^2}} < \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} \frac{10^n}{10^{n^2-m^2}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{10^{m+k}}{10^{(m+k)^2-m^2}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k^2+2km-m-k}}$

  Ahora bien, es sencillo observar que, dado que $m, k \in \mathbb{N} \implies k^2 + 2km - m - k > k \ \forall k \geq 1$.

  Entonces, tenemos que
  $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} 10^{m^2-n^2} p_n < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k^2+2km-m-k}} < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} < 1$, tal y como queríamos demostrar.

  Por tanto, ahora podemos terminar de desarrollar (1) y obtener:
  $[10^{m^2}\alpha] = \sum\limits_{n=1}^{m} 10^{m^2-n^2} p_n$

- Análogamente, resolvemos (2):
  $10^{2m-1}[10^{(m-1)^2}\alpha] = 10^{2m-1} \sum\limits_{n=1}^{m-1} 10^{(m-1)^2-n^2} p_n = \sum\limits_{n=1}^{m-1} 10^{2m-1+(m-1)^2-n^2} p_n = \sum\limits_{n=1}^{m-1} 10^{m^2-n^2} p_n$

Y de esta forma, (1) y (2) $\Longrightarrow [10^{m^2}\alpha] - 10^{2m-1}[10^{(m-1)^2}\alpha] = \sum_{n=1}^{m} 10^{m^2-n^2} p_n - \sum_{n=1}^{m-1} 10^{m^2-n^2} p_n = 10^{m^2-m^2} p_m = p_m$

Problema escrito por Jesús de los Nietos Valle.