**1.4.21** *Demostrar que un polinomio P(n) con coeficientes enteros no puede ser primo para todo* $n \geq m_0$*, sea quien sea* $n_0$*.*

**OBSERVACIÓN**: se sobreentiende que P(n) no es constante pues, si pudiera serlo, bastaría con definir P(n)=p, siendo p un primo.

Supongamos que existe un polinomio no constante

$$P(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_r n^r$$

de tal forma que P(n) es primo para todo $n \geq n_0$.

Podemos definir $P'(n) = P(n + n_0) = b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \cdots + b_r n^r$.
De esta forma, ahora basta con suponer que P'(n) es primo para todo $n \geq 0$.

Concretamente, $P'(0) = b_0 = p$, con p primo.
Más aún, $\forall k \geq 1$,

$$P'(kp) = b_0 + b_1 kp + \cdots + b_r (kp)^r$$
$$P'(kp) = p + b_1 kp + \cdots + b_r (kp)^r$$
$$P'(kp) = p(1 + b_1 k + \cdots + b_r k^r p^{r-1})$$
$$P'(kp) \equiv 0 \ (mod\ p)$$

Además, puesto que P'(kp) debe ser primo para todo $k \geq 1$, P'(kp)=p $\forall k \geq 1$.

Y de aquí se deduce la contradicción, puesto que $\lim_{k\to\infty} |P'(kp)| = \infty$, ya que P'(kp) es un polinomio no constante en k.

*Problema escrito por Jesús de los Nietos Valle.*