1.4.18. *Demostrar que si $2^n + 1$ es primo, entonces n es cero o una potencia de 2.*

Solución: Sea $n = b2^k$, con b impar y $k \geq 0$. Supongamos que $b > 1$ Observemos que

$$2^{2^k} \equiv -1 \pmod{2^{2^k} + 1}$$

Por lo tanto,

$$2^n + 1 = (2^{2^k})^b + 1 \equiv (-1)^b + 1 = -1 + 1 = 0 \pmod{2^{2^k} + 1}$$

Y como consecuencia, $2^{2^k} + 1$ divide a $2^n + 1$. Como $b > 1$, tenemos que $1 < 2^{2^k} + 1 < 2^n + 1$ y hemos encontrado un divisor no trivial de $2^n + 1$. Hemos llegado a una contradicción, pues $2^n + 1$ es primo.

Por lo tanto, debe ser $b = 1$, y $n = 2^k$.

Problema escrito por Rubén García-Valcárcel Sen