1.4.17. *Demostrar que para todo $\alpha > 0$ y para todo $\epsilon > 0$, existen a, b tales que $|\frac{a}{b} - \alpha| < \epsilon$ y a+b es primo.*

Para cada primo p definimos:

$$a_p = \frac{\alpha p}{1+\alpha} - \{\frac{\alpha p}{1+\alpha}\} = [\frac{\alpha p}{1+\alpha}]$$
$$b_p = p - a_p \geq p - \frac{\alpha p}{1+\alpha} = \frac{p}{1+\alpha}$$

Entonces, tenemos que:

$$|\frac{a_p}{b_p} - \alpha| = |\frac{a_p - \alpha b_p}{b_p}| = |\frac{(1+\alpha)a_p - \alpha p}{b_p}| = |\frac{(1+\alpha)\{\frac{\alpha p}{1+\alpha}\}}{b_p}| < \frac{1+\alpha}{b_p} \leq \frac{(1+\alpha)^2}{p} < \epsilon$$

Por tanto, una vez fijados α y ϵ, tenemos que para todo primo p $> \frac{(1+\alpha)^2}{\epsilon}$ se verifica que $|\frac{a_p}{b_p} - \alpha| < \epsilon$ y a+b es primo.

Problema escrito por Jesús de los Nietos Valle.