1.4.16. *Demostrar que* $F_n = \prod_{i=0}^{n-1} F_i + 2$. *Deducir que* $(F_m, F_n) = 1$ *para* $n \neq m$ *y de aquí la existencia de infinitos primos.*

Solución:
Recordemos que por definición, $F_n = 2^{2^n} + 1$
Vamos a demostrar la igualdad por inducción en n.

Para n=1, $F_1 = 5 = 3 + 2 = F_0 + 2$, se cumple.

Veamos ahora que se cumple para $n + 1$:

$$\prod_{i=0}^{n} F_i + 2 = (F_n - 2)F_n + 2 = (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1) + 2 = 2^{2^{n+1}} + 1 = F_{n+1}$$

Donde hemos usado inducción en la primera igualdad.

Demostrada esta expresión, es inmediato ver que si $(F_m, F_n) > 1$ para $n \neq m$, entonces (F_m, F_n) tiene que dividir a 2, por lo tanto $(F_m, F_n) = 2$, lo que no puede ser al ser los números de Fermat impares.

Como hay infinitos números de Fermat y son todos primos entre sí, hay un numero infinito de números primos.

Problema escrito por Federico Alfaro.