1.4.14. *Demostrar que* $p_{n+1} \leq p_1p_2p_3...p_n+1$ *para todo* $n \geq 1$. *Demostrar por inducción que* $p_n \leq 2^{2^n}$. *Deducir que* $\pi(x) \geq \log_2 \log_2 x - 1, x \geq 2$.

Solución: Tomamos

$$m = p_1p_2p_3...p_n + 1$$

Entonces, hay dos opciones:

- m es primo: En este caso, tenemos que $p_1 < m$, $p_2 < m$, .., $p_n < m$. Por tanto, es obvio que $p_{n+1} \leq m$.

- m no es primo: En este caso, sabemos que $p_1, p_2, ...p_n$ no dividen a m. Esto se debe a que:

$$m \equiv 1 \pmod{p_i}, i \in \{1, ..., n\}$$

  Como $p_1, ..., p_n$ son los n primeros primos, entonces, debe haber un número primo $p < m$ tal que $p \mid m$, y $p > p_n$. Por tanto, $p_{n+1} \leq p < m$.

Por tanto, se cumple que $p_{n+1} \leq p_1p_2p_3...p_n + 1$.

Ahora, queremos ver que $p_n \leq 2^{2^n}$. Demostramos por inducción:

- Caso $n = 1$:

$$p_1 = 2 \leq 2^{2^1} = 2^2 = 4$$

- Caso general: Suponemos cierto para n. Queremos demostrar para $n+1$.

$$p_{n+1} \leq p_1p_2p_3...p_n + 1 \leq 2^{2^1}2^{2^2}...2^{2^n} + 1 =$$
$$= 2^{\sum_{i=1}^{n} 2^i} + 1 = 2^{2^{n+1}-2} + 1$$

  Pero, si $n \geq 1$:

$$2^{2^{n+1}-2} + 1 < 2^{2^{n+1}}$$

  Por lo que:

$$p_{n+1} \leq 2^{2^{n+1}}$$

Por tanto, es cierto que $p_n \leq 2^{2^n}$

Ahora, falta ver que $\pi(x) \geq \log_2 \log_2 x - 1$ si $x \geq 2$.

Tomamos $x \geq 2$. Entonces, existe $n \geq 1$ tal que $p_{n-1} \leq x < p_n$. Tenemos que, en este caso, $\pi(x) = n - 1$.

Además:

$$x \leq p_n \leq 2^{2^n} = 2^{2^{\pi(x)+1}}$$

Tomamos dos veces el logaritmo en base 2 a ambos lados de la ecuación, y obtenemos que:

$$\log_2 \log_2 x \leq \pi(x) + 1$$

De aquí, obtenemos que:

$$\pi(x) \geq \log_2 \log_2 x - 1$$

Problema escrito por Javier Sanz-Cruzado Puig