1.4.10. *Sea S un conjunto de n enteros no necesariamente distintos. Demostrar que algún subconjunto no vacío de S posee una suma divisible por n.*

Solución: Sabemos que S está formado por los enteros $x_1, x_2, \ldots x_n$. Para todo i entre 1 y n calculamos la suma de los i primeros términos dados anteriormente módulo n:

$$A_i = \sum_{j=1}^{i} x_j \pmod{n}$$

Ahora, pueden ocurrir dos cosas:

- O bien existe m tal que A_m es $0 \mod n$, en cuyo caso el subconjunto buscado es el formado por $x_1, x_2, \ldots x_m$.
- O bien no existe tal m. En este caso, quedan $n - 1$ posibles clases de equivalencia módulo n, y hay n sumas, por lo que por el principio del palomar existen j y k, con $j < k$ tal que $A_j = A_k$.

  Pero entonces $A_k - A_j = 0 \pmod{n}$ y también sabemos que:

  $$A_k - A_j = \sum_{i=j+1}^{k} x_i \pmod{n}$$

  Por tanto en este caso el subconjunto buscado es el formado por los elementos $x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots x_k$.

Es decir que tal y como dice el enunciado en cualquiera de los dos casos existe un subconjunto no vacío cuya suma es divisible por n (es congruente con 0 módulo n).

Problema escrito por Carlos Ramos Carreño