1.4.26. *Probar que* $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ *no es entero si* $n > 1$.

Solucin: Supongamos que para algún n, el resultado de la suma es un número entero

$$m = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

Sea $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$. Consideremos la suma $2^{k-1}m = \sum_{j=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{j}$.

Pasando a la izquierda la fracción correspondiente a $j = 2^k$ obtenemos:

$$\frac{2^k m - 1}{2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2^k}}^{n} \frac{2^{k-1}}{j}$$

Fijémonos en la fraccin irreducible de ambas partes de la igualdad: La fracción izquierda es irreducible, y el denominador es par. Sin embargo, todas las fracciones de la suma de la derecha tienen denominador impar porque si $j \neq 2^k$ la mayor potencia de 2 que divide a j es a lo más 2^{k-1}, por lo que el mínimo comn múltiplo d de dichos denominadores será impar. El denominador de la fracción irreducible divide a d, por lo tanto también será impar. Tenemos que:

$$\frac{2^k m - 1}{2} = \frac{a}{b}$$

Donde los números $2^k m - 1$ y b son impares. Por lo tanto, llegamos a una contradicción: $(2^k m - 1)b = 2a$

Problema escrito por Rubén Garca-Valcárcel Sen