Diofanto y Fermat

Diofanto vivió en el siglo III, de su *Aritmética* nos han llegado seis libros de un total de trece que componían la obra. Este libro consiste en una sucesión de problemas en los que se pide hallar números que cumplen ciertas identidades algebraicas. Diofanto entendía por *número* lo que hoy llamamos números racionales positivos. Como ejemplos de problemas del libro de Diofanto pongamos los siguientes:

Libro II, Problema 32. *Encontrar tres números X, Y y Z tales que el cuadrado de cualquiera de ellos sumado con el siguiente dé un cuadrado, esto es, los tres números*

$$X^2 + Y, \quad Y^2 + Z, \quad y \quad Z^2 + X,$$

deben ser cuadrados.

Solución de Diofanto.

Sea el primero $X = x$, el segundo $Y = 2x + 1$, y el tercero $2(2x + 1) + 1$, o bien $Z = 4x + 3$. De este modo dos de las condiciones son satisfechas.

La última condición nos dice que $(4x + 3)^2 + x$ debe ser un cuadrado, digamos que $(4x - 4)^2$. De este modo $x = 7/57$, y los números pedidos son

$$X = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{57}}, \quad Y = \frac{\mathbf{71}}{\mathbf{57}}, \quad Z = \frac{\mathbf{199}}{\mathbf{57}}.$$

□

Libro IV, Problema 16. *Encontrar tres números X, Y, Z tales que su suma sea un cuadrado, y además el cuadrado de cualquiera de ellos sumado con el siguiente sea un cuadrado, es decir,*

$$X + Y + Z, \quad X^2 + Y, \quad Y^2 + Z, \quad Z^2 + X,$$

sean cuadrados.

Solución de Diofanto.

Supongamos que el número Y sea un número cualquiera de x's, digamos que $Y = 4x$. Por tanto, tenemos que encontrar qué cuadrado más $4x$ da un cuadrado. Dividimos $4x$ en dos factores, sean $2x$ y 2, y tomamos el cuadrado de la mitad de su diferencia: $(x - 1)^2$. Este es el cuadrado requerido.

Así pues tomamos $X = x - 1$.

Además, $16x^2$ más el tercero debe ser un cuadrado. Por tanto, si restamos $16x^2$ de un cuadrado tendremos el tercer número. Tomemos el lado de este cuadrado igual al lado de $16x^2$, esto es, $4x$, más 1.

Por tanto $Z = (4x + 1)^2 - 16x^2 = 8x + 1$.

Ahora la suma de los tres debe ser un cuadrado, así pues $13x$ debe ser un cuadrado, digamos que $169y^2$*.

---

* Diofanto aquí no usa una nueva variable sino que cambia de x, diciendo en este punto: *y x se convierte en* $13x^2$.

Los números son entonces:

$$X = 13y^2 - 1, \quad Y = 52y^2, \quad Z = 104y^2 + 1.$$

Todavía nos queda conseguir que $Z^2 + X$ sea un cuadrado. Así pues que $10816y^4 + 221y^2$ sea un cuadrado, o bien que $10816y^2 + 221$ sea un cuadrado, digamos que $(104y + 1)^2$. Resulta entonces $y = 220/208 = 55/52$.

Los números pedidos son entonces**:

$$X = \frac{\mathbf{36621}}{\mathbf{2704}}, \quad Y = \frac{\mathbf{157300}}{\mathbf{2704}}, \quad Z = \frac{\mathbf{317304}}{\mathbf{2704}}.$$

□

Es difícil ponderar la importancia del libro de Diofanto. Representa el inicio de la filosofía del *arte por el arte en las Matemáticas*. Los problemas no tienen más interés que ser un reto al espíritu humano, al ingenio y a la creatividad.

Los libros de Diofanto fueron editados en 1621 por Bachet. Uno de los ejemplares cayó en manos de Fermat quién lo estudió atentamente e hizo numerosas anotaciones. Una de ellas es la famosa donde afirma que $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras con $xyz \neq 0$ si $n > 2$, con el comentario sobre lo estrecho del margen. Esta excusa del margen recuerda la de los malos alumnos que se quejan de falta de tiempo en el examen, además una vez, bueno, pero Fermat era reincidente. Así lo vemos en el siguiente problema.

Libro IV, Problema 29. *Encontrar cuatro cuadrados V^2, X^2, Y^2, y Z^2 tales que su suma más la suma de sus lados sea igual a un número dado A, esto es*

$$V^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 + V + X + Y + Z = A.$$

Solución de Diofanto.

Consideremos el caso en que el número dado es $A = 12$.

Observemos que $x^2 + x + 1/4$ es un cuadrado.

Por tanto la suma de los cuatro cuadrados más la suma de sus lados más 1 es la suma de otros cuatro cuadrados y, por hipótesis, debe ser igual a 13.

Así pues debemos dividir 13 en cuatro cuadrados, entonces, si restamos 1/2 de cada uno de sus lados, tendremos los lados de los cuadrados pedidos.

Pero

$$13 = 4 + 9 = \left(\frac{64}{25} + \frac{36}{25}\right) + \left(\frac{144}{25} + \frac{81}{25}\right).$$

Luego los lados de los cuadrados pedidos son 11/10, 7/10, 19/10 y 13/10, y los cuadrados pedidos son:

$$V = \frac{\mathbf{121}}{\mathbf{100}}, \quad X = \frac{\mathbf{49}}{\mathbf{100}}, \quad Y = \frac{\mathbf{361}}{\mathbf{100}}, \quad Z = \frac{\mathbf{169}}{\mathbf{100}}.$$

□

** Como en otras ocasiones la solución puede simplificarse a $X = 2817/208$, $Y = 3025/52$, $Z = 3051/26$, el máximo común divisor de los denominadores es 208

El editor Bachet tenía un comentario interesante sobre este problema

> «Diofanto parece suponer aquí y en otros lugares del libro V que cualquier número que no sea ya un cuadrado es la suma de dos, tres o cuatro cuadrados. He comprobado esta afirmación para todos los números hasta el 325. Sería interesante ver una demostración de este teorema.» (Bachet)

Y Fermat en su maltratada copia escribió

> «He sido el primero en descubrir un muy bonito teorema de la mayor generalidad, el siguiente: Cada número es o bien un número triangular o la suma de dos o tres números triangulares; cada número es un cuadrado o la suma de dos, tres, o cuatro cuadrados; cada número es un número pentagonal o la suma de dos, tres, cuatro, o cinco números pentagonales; y así hasta el infinito, para hexagonales, heptagonales y cualesquiera otros polígonos, el enunciado de este teorema hermoso y general debe variarse con el número de ángulos. La demostración que depende de variados y abstrusos misterios de los números no la puedo dar aquí, pues he decidido dedicar un trabajo completo y separado a este tema y con ello avanzar la aritmética en esta región de la investigación de manera extraordinaria más allá de sus límites antiguos y conocidos.» (Fermat)

Desgraciadamente Fermat nunca publicó este prometido trabajo.

La *Aritmética* debió estar escrita primeramente en rollos, posiblemente el origen de la división en libros de la obra. Fue copiado y recopiado por escribientes que a veces no conocían suficientemente el contenido, esto conduce a que ciertos pasajes no se entiendan. Uno de estos pasajes está en el problema 9 del libro V.

Libro V, Problema 9. *Dividir la unidad en dos partes* $1 = X + Y$ *tales que si el mismo número dado* A *se suma con cualquiera de las partes se obtenga un cuadrado, esto es, que sean cuadrados*

$$X + A, \quad Y + A.$$

*Condición necesaria**: El número dado no debe ser impar y el doble más uno $2A+1$ no debe ser divisible por ningún número primo p que al incrementarlo en 1 sea divisible por 4, [es decir, un número primo de la forma $4n - 1$].

* El enunciado de la condición en los manuscritos que tenemos de Diofanto no se lee con claridad. La condición que hemos escrito es la lectura de Fermat, pero no cabe duda que en Diofanto se habla de: *doble del número*, *mayor en una unidad*, y *número primo*. Según Heath "No parece improbable que, si Diofanto no dio exactamente la condición necesaria y suficiente establecida por Fermat, dio una aproximación a ella, y ciertamente sabía que ningún número primo de la forma $4n + 3$ podía ser la suma de dos cuadrados".

Solución de Diofanto.

Consideremos el caso en que el número dado es $A = 6$.

Por tanto 13 debe ser dividido en dos cuadrados cada uno de ellos mayor que 6. Si dividimos 13 en dos cuadrados cuya diferencia sea menor que 1 habremos resuelto el problema.

Tomemos la mitad de 13, esto es $6+1/2$, tenemos que sumar a $6+1/2$ una pequeña fracción que lo haga un cuadrado. Multiplicando por 4, tenemos que hacer

$$\frac{1}{x^2} + 26$$

un cuadrado, es decir que $26x^2 + 1$ sea un cuadrado, digamos que $(5x + 1)^2$, de donde sigue que $x = 10$.

Esto es, para hacer 26 un cuadrado debemos añadir $1/100$, o bien, para hacer $6 + 1/2$ un cuadrado debemos sumarle $1/400$, de hecho

$$\frac{1}{400} + \left(6 + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{51}{20}\right)^2.$$

Por tanto debemos dividir 13 *en dos cuadrados tales que sus lados sean tan próximos como sea posible a* $51/20$. Aplicamos entonces el método de *aproximación a los límites*.

Observamos que $13 = 2^2 + 3^2$. Así pues buscamos dos números u y v tales que $3 - u = 51/20$, de forma que $u = 9/20$, y que $2 + v = 51/20$, luego $v = 11/20$.

De acuerdo con esto escribimos $(11x + 2)^2$ y $(3 - 9x)^2$ para los cuadrados que buscamos [sustituyendo x en lugar de $1/20$].

La suma de estos dos cuadrados queremos que sea 13, luego $202x^2 - 10x + 13 = 13$, de donde sigue que $x = 5/101$, los lados de los cuadrados son $257/101$ y $258/101$.

Restando 6 de sus cuadrados, obtenemos como partes de la unidad:

$$X = \mathbf{\frac{4843}{10201}}, \quad Y = \mathbf{\frac{5358}{10201}}.$$

$\square$

Como vemos Diofanto sabía que para poder resolver este problema necesitaba una condición en el número A. Esto se debe al siguiente teorema

Teorema. *Un número natural es suma de dos cuadrados si y sólo si es de la forma $n = mt^2$, donde cada primo que divide a m es congruente con* 1 *módulo* 4.